(電磁誘導：LC 回路における放電)induction-LC-discharging-qa140728A.tex
電気抵抗 (大きさ $R$) とコイル (自己インダクタンス $L$) と電池（起電力 $V_0$) を直列につなぐ LR 回路を十分長い間充電したら、電流 $I_0 \equiv V_0/R$ が流れるようになった。その後、電池の両極をショート (短絡）する場合を考える。

1. その後，電流は直ちに 0 になるか、どのような電流が流れるか求めよ。
2. ショート (短絡）の時間 $t$ を横軸、電流の強さ $I(t)$ を縦軸にとり、結果の概略をグラフとして描け。
3. 抵抗で消費されるジュール熱を計算し、元あった磁気エネルギーと等しいかどうか調べよ。

(解答例)

1. 電磁誘導の法則を用いて，LR 回路にキルヒホッフの第 2 法則を適用すると

$$-L\frac{dI}{dt} = IR \tag{1}$$

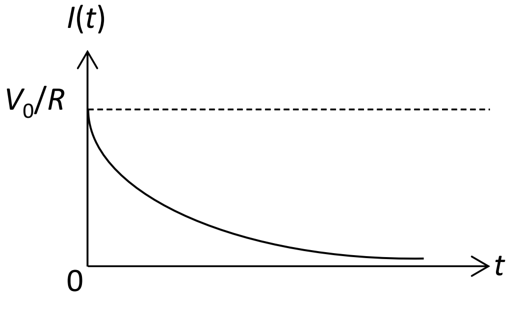
が成り立つ。ここで、$L,\ R$ は一定で、$I = I(t)$ であることに注意する。式 (1) を次のように式変形して、まず一般解を求める。

$$\begin{aligned} \frac{dI}{I} &= -\frac{R}{L}dt \to \log_{\mathrm{e}}|I| = -\frac{R}{L}t + C\ (C: \text{任意定数}) \\ \to I(t) &= C'\mathrm{e}^{-Rt/L}\ (C' \equiv \pm \mathrm{e}^{C}: \text{任意定数}). \end{aligned} \tag{2}$$

ここで、初期条件 $I(0) = I_0 \equiv V_0/R$ を式 (2) に代入して，特殊解が得られる。

$$\frac{V_0}{R} = C' \to C' = \frac{V_0}{R} \to I(t) = \left(\frac{V_0}{R}\right)\mathrm{e}^{-R\ t/L}. \tag{3}$$

2. 前問の結果について、$I'(t=0) = -V_0/L < 0,\ I(t \to \infty) = 0$ であることを考慮するとグラフの概略は次のように描け、電流はすぐには 0 にならない。




3. 題意によりジュール熱は

$$\int_0^\infty I^2(t)Rdt = \frac{V_0^2}{R}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2Rt/L}dt = \frac{1}{2}L\left(\frac{V_0}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}LI_0^2 \tag{4}$$

となり、元の磁気エネルギーに等しい。（エネルギー保存則の一例。）