(μ 粒子の寿命と走行距離 (1))

非常に高いエネルギーをもつ一次宇宙線は大気上空の原子と衝突して高エネルギー（速さ V) のミュー粒子（μ）をつくる。この μ は 6km 位の高空から地上に達することが知られている。地上で測定すると、静止状態の μ は平均寿命 $\tau(= 2.15 \times 10^{-6}\mathrm{s})$ で電子 (e^-) と中性微子（ニュートリーノ、ν_μ）に崩壊する。いかなる粒子も光速度を越えられないので, この μ の平均走行距離は $\tau \times c = (2.15 \times 10^{-6}\mathrm{s}) \times 3.0 \times 10^8\mathrm{m/s} = 645\mathrm{m}$ であり、6km の距離を走行して地上に達することはできないことになる。特殊相対論において、二つの立場から、この事実を理解してみよう。

1. 速さ V で走行する μ の平均寿命と走行距離を地上（＝S系）で観測する。 その平均寿命 τ' を τ, V, c で表し、その存命中に走行する距離 ℓ を τ, V, c で表わせ。さらに、$V = 0.999c$(光速度 $c(= 3.0 \times 10^8\mathrm{m/s})$) として、$\tau'$ と ℓ を具体的に計算し、6km という距離を走行できるか どうかを述べよ。
2. 同じ事象を速さ V で走行する μ に固定された座標系（＝S' 系) から 測定する。地上において観測される距離 ℓ_0 が走行中の μ には ℓ_0 とは 異なる距離 ℓ' として観測される。この距離 ℓ' を ℓ_0, V, c で表し、走行に要する時間 T を ℓ_0, V, c で表わせ。さらに、$V = 0.999c$ および $\ell_0 = 6\mathrm{km}$ として、ℓ' と T を具体的に 計算し、存命中に地上に到達できるかど うかを述べよ。

[解答例]

1. $\sqrt{1-(V/c)^2} = \sqrt{1-(0.999)^2} = 0.0447$ だから, 地上から見た運動中の μ 粒子の寿命は

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1-(V/c)^2}} = \frac{2.15 \times 10^{-6}\mathrm{s}}{0.0447} = 4.81 \times 10^{-5}\mathrm{s}. \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\ell &= \tau' \times V = \frac{\tau V}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \\ &= 4.81 \times 10^{-5}\mathrm{s} \times (0.999 \times 3.0 \times 10^8\mathrm{m/s}) = 14.4 \times 10^3\mathrm{m} \\ &= 14.4\mathrm{km}.\end{aligned} \tag{2}$$

   よって、6km より十分長いので、この μ は平均として地上に到達できる。

2. 同様に、運動中の μ 粒子から見た地上までの距離は短くなるので、所要時間は

$$\begin{aligned}\ell' &= \ell_0\sqrt{1-(V/c)^2} = 6\mathrm{km} \times 0.0447 \\ &= 268.2\mathrm{m}.\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}T &= \frac{\ell'}{V} = \frac{\ell_0\sqrt{1-(V/c)^2}}{V} \\ &= \frac{268.2\mathrm{m}}{0.999 \times 3.0 \times 10^8\mathrm{m/s}} = 0.859 \times 10^{-6}\mathrm{s}.\end{aligned} \tag{4}$$

   となり、寿命よりも十分に短いので平均として地上に到達できる。

以上の結果より、同じ現象が二つの見方から整合的に記述されたことになる。