

水素原子に対するボーア・モデルについて以下の問いに答えよ。ただし、陽子は静止していると近似し、電子の質量を m 、電荷を e 、真空中の電気力の比例定数を k_0 、プランク定数を h 、 $\hbar \equiv h/2\pi$ とする。

1. 電子が、陽子を中心とする半径 r 、円周方向の速さ v での円運動を行なっているとして、ニュートン力学の運動方程式が成り立つと仮定した場合、その式を記せ。
2. (角運動量についての) 量子条件という仮定の式を記せ。ただし、正整数を n とする。
3. この場合、電子の力学的エネルギー E の式を記せ。
4. 前問までの結果から速さ v を消去することにより、半径 r を e, \hbar, k_0, m, n で表す式を求めよ。
5. 前問と同様に、力学的エネルギー E を e, \hbar, k_0, m, n で表す式を求めよ。

(解答例)

1. 電気力が向心力の役割を果たすので、向心向きの運動方程式は次ようになる。

$$m \frac{v^2}{r} = k_0 \frac{e^2}{r^2}. \quad (1)$$

2. 題意より

$$r \cdot mv = n\hbar. \quad (2)$$

3. 引力の電気力のポテンシャルエネルギーは負符号であるから、力学的エネルギー E は

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - k_0 \frac{e^2}{r}. \quad (3)$$

4. 式 (2) より、

$$v = \frac{n\hbar}{mr}. \quad (4)$$

この式 (4) を式 (1) に代入して変形すると、半径の式が求まる。

$$\begin{aligned} m \frac{1}{r} \left(\frac{n\hbar}{mr} \right)^2 &= k_0 \frac{e^2}{r^2} \\ \rightarrow r &= \frac{1}{k_0} \left(\frac{\hbar^2}{e^2 m} \right) n^2. \end{aligned} \quad (5)$$

5. 前問の式 (5) を式 (4) に代入して

$$v = \frac{e^2 k_0}{\hbar n}. \quad (6)$$

式 (5) と式 (6) を式 (3) に代入して

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m \left(\frac{e^2 k_0}{\hbar n} \right)^2 - k_0 e^2 \frac{e^2 m}{\hbar^2 n^2} \\ &= -k_0^2 \left(\frac{e^4 m}{2\hbar^2} \right) \frac{1}{n^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

が求まる。