

質量 m の (量子的) 粒子が長さ L の直線上に束縛されているだけで、力が働いていないとする。(1次元量子箱)。ド・ブローイ波にもとづいた議論を適用すると、この粒子のエネルギーは不連続な (離散的な) 値だけしか許されないことを示し、これらの値を求めよ。特に、可能な最低エネルギーを記せ。ただし、プランク定数を h とする。

(解答例)

この粒子の運動量を p とすると、ド・ブローイの関係より、物質波の波長 λ は

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (1)$$

与えられる。題意より、両端を固定端と見なして半波長の整数倍が長さ L に等しくなるような波のみが可能であるから、その波長は

$$\frac{\lambda}{2} \cdot n = L, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2)$$

で与えられる。この式 (2) を式 (1) に代入すると

$$p = \frac{nh}{2L} \quad (3)$$

が得られる。この結果をエネルギー E に代入すると

$$\begin{aligned} E &= \frac{p^2}{2m} \\ \rightarrow E_n &= \left(\frac{h^2}{8mL^2} \right) n^2, \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (4)$$

のように、エネルギーは不連続的な (離散的な) 値だけが可能になる。特に、最低エネルギーは $E_1 = h^2/(8mL^2)$ のように、ゼロではなく、有限の値となる。