

1. 演算子 $(d^2/dx^2 + x^2)$ に対して関数 $\psi(x) = e^{-x^2/2}$ は固有関数であるかどうか調べよ。固有関数の場合には、固有値を求めよ。
2. 演算子 $(d^2/dx^2 - x^2)$ に対して関数 $\psi(x) = e^{-x^2/2}$ は固有関数であるかどうか調べよ。固有関数の場合には、固有値を求めよ。

1.

$$\frac{d}{dx}\psi(x) = -xe^{-x^2/2}, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2}\psi(x) &= \frac{d(-xe^{-x^2/2})}{dx}, \\ &= (-e^{-x^2/2} + x^2e^{-x^2/2}) \\ &= (x^2 - 1)\psi(x) \end{aligned}$$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + x^2\right)\psi(x) = (2x^2 - 1)\psi(x) \quad (2)$$

となるので、固有関数ではない。

2.

$$\frac{d}{dx}\psi(x) = -xe^{-x^2/2}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2}\psi(x) &= \frac{d(-xe^{-x^2/2})}{dx}, \\ &= (-e^{-x^2/2} + x^2e^{-x^2/2}) \\ &= (x^2 - 1)\psi(x) \end{aligned}$$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - x^2\right)\psi(x) = (-1)\psi(x) \quad (4)$$

となるので、固有関数である。その固有値は -1 である。