

水素原子 (の主量子数 n の電子状態の) エネルギー E_n は電子の質量 m 、電荷 $-e$ 、真空の誘電率 ϵ_0 、プランク定数 h 、 $\hbar \equiv h/2\pi$ を用い

$$E_n = -\frac{|E_1|}{n^2}, \quad |E_1| \equiv \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \left(\frac{me^4}{2\hbar^2}\right) \quad (1)$$

と表される。次の問いに答えよ。

1. $1/(4\pi\epsilon_0) = 8.98755 \times 10^9 \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{coul}^2$ 、 $e = 1.6021773 \times 10^{-19} \text{coul}$ 、電子の質量 $m = 0.910908 \times 10^{-30} \text{Kg}$ 、素電荷 $e = 1.6021773 \times 10^{-19} \text{coul}$ 、プランク定数 $\hbar \equiv \frac{h}{2\pi} = 1.05457266 \times 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s}$ 、 $1\text{eV} = 1.6021773 \times 10^{-19} \text{J}$ を用いて、 $|E_1|$ の値 (eV) を計算せよ。
2. 水素原子のイオン化に光を用いるとすれば、その波長 λ の上限値を光速 c 、プランク定数 h とイオン化エネルギー I を用いた文字式で表せ。
3. 波長 λ の上限値を Å 単位で計算し、可視光領域 (波長 5000Å 程度) の波長を持つ光で水素原子をイオン化できるかどうか述べよ。ただし、 $c = 2.99792458 \times 10^8 \text{m/s}$ 、 $ch \cong 1973.3 \text{Å} \cdot \text{eV}$ を用いてよい。

(解答例)

1. 題意より

$$|E_1| = \left(\frac{8.98755 \times 10^9 \text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{coul}^2}\right)^2 \times \left(\frac{0.910908 \times 10^{-30} \text{kg} \times (1.6021773 \times 10^{-19} \text{coul})^4}{2 \times (1.05457266 \times 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s})^2}\right) \quad (2)$$

まず、数値部分だけを指数の符号に注意して計算すると;

$$\frac{(8.98755)^2 \times 0.910908 \times (1.6021773)^4}{2 \times (1.05457266 \times)^2} \times 10^{18-30-76+68} = 217.7078762 \times 10^{-20}. \quad (3)$$

次に次元 (単位) の部分を計算する ;

$$\frac{\text{N}^2 \text{m}^4 \text{kg} \text{coul}^4}{\text{coul}^4 \text{J}^2 \text{s}^2} = \frac{\text{N} \text{mkg}}{\text{s}^2} = \text{J}. \quad (4)$$

よって

$$|E_1| = 217.7078762 \times 10^{-20} \frac{\text{eV}}{1.6021773 \times 10^{-19}} \cong 13.6 \text{eV} \quad (5)$$

となる。

2. イオン化するためには、(基底状態の)エネルギー $|E_1|$ だけ外部からエネルギーを加える必要がある。これがイオン化エネルギー I である。振動数を f とすると、アインシュタインの関係より、光子のエネルギーは hf と表される。そのエネルギーがイオン化エネルギー以上でなければならないので

$$\begin{aligned} hf (= h\frac{c}{\lambda}) &\geq I \\ \rightarrow \lambda &\leq \frac{ch}{I} \end{aligned} \quad (6)$$

3. $ch = c\hbar/(2\pi)$ の値を用いると

$$\begin{aligned} \lambda &\leq \frac{ch}{I} = \frac{2 \times 3.14 \times 1973.3 \text{ \AA} \cdot \text{eV}}{13.6 \text{ eV}} \\ \rightarrow \lambda &\leq 911 \text{ \AA}. \end{aligned} \quad (7)$$

従って、可視光により水素原子をイオン化することは不可能である。