

幅 L の 1 次元無限量子井戸の中におかれた質量 m の粒子のとり得るエネルギーは

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n^2, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1)$$

のように離散化される。ここでは c は光速, $\hbar = h/2\pi$ はプランク定数である。定数の具体的な数値が必要な場合、 $h = 6.6260755 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$, $c \cong 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$, $1 \text{ eV} \cong 1.60 \times 10^{-19} \text{ J}$, $m = 0.911 \times 10^{-30} \text{ kg}$ を用いよ。

- 異なるエネルギー準位間 ($E_{n'}, E_n$) の遷移の際に放出される光子の波長 $\lambda_{n'n}$ を求めよ。
($\lambda_{n'n}$ を c, m, L, h, n', n で表せ。)
- 幅 $L = 10^{-10} \text{ m}$ ($= 1 \text{ \AA}$) の場合、この無限量子井戸の中の電子の $n=1, 2$ を持つ定常状態のとり得るエネルギーはそれぞれ eV になるか計算せよ。
- 前問と同じ条件の場合、電子が $n' = 2$ から $n = 1$ の状態へ遷移する場合、放射される光子の波長 λ を (m 単位で) 計算せよ。

(解答例)

1 . 波長 $\lambda_{n'n}$ を持つ光子のエネルギーは $ch/\lambda_{n'n}$ と表され、エネルギーの保存則より

$$E_{n'} - E_n = \frac{ch}{\lambda_{n'n}}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned} \lambda_{n'n} &= \frac{ch}{E_{n'} - E_n} \\ &= \frac{8mcL^2}{h(n'^2 - n^2)} \end{aligned}$$

2 .

$$E_n = \frac{h^2}{8mL^2} n^2$$

ここで、

$$\begin{aligned} &\frac{h^2}{8mL^2} \\ &= \frac{(6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})^2}{8 \times 0.911 \times 10^{-30} \text{ kg} \times (10^{-10} \text{ m})^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(6.63)^2}{8 \times 0.911} \times 10^{-18} \text{ J} \quad (1 \text{ J} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2) \\ &= \frac{(6.63)^2}{8 \times 0.911 \times 1.6} \times 10 \text{ eV} \\ &= 37.7 \text{ eV} \end{aligned}$$

よって

$$E_1 = 37.7 \text{ eV}, \quad E_2 = 150.8 \text{ eV}$$

3 . 前々問、前問の結果より、

$$\begin{aligned} \frac{ch}{\lambda_{n'n}} &= 150.8 \text{ eV} - 37.7 \text{ eV} = 113.1 \text{ eV} \\ \Rightarrow \lambda_{n'n} &= \frac{2.997 \times 10^8 \text{ m/s} \times 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{113.1 \text{ eV}} \\ &= \frac{2.997 \times 6.63 \times 10^{-26} \text{ J} \cdot \text{m}}{113.1 \times 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}} \\ &= 1.01 \times 10^{-8} \text{ m} \end{aligned}$$