(無限井戸型ポテンシャル系の励起状態における運動量の期待値)
filename=potential-infinite-expectationvalue-Px-2ndstate-QA20150301A.tex

幅が位置座標 $x = 0$ から $x = a(> 0)$ の無限井戸型ポテンシャルの中の量子的粒子の第1励起状態の波動関数が $\psi_2(x) \equiv \sqrt{2/a} \cdot \sin(2\pi x/a)$ と与えられている。ディラック定数を $\hbar$ として次の問に答えよ。

a. この波動関数 $\psi_2(x)$ は規格化されているかどうか、規格化積分を計算して確認せよ。

b. この状態における運動量演算子 $\hat{p}$ の期待値を計算せよ。

(解答例)

a. 題意より

$$\begin{aligned}
\int_0^a \psi_2^*(x)\psi_2(x)dx &= \frac{2}{a}\int_0^a \sin^2\left(\frac{2\pi x}{a}\right)dx = \frac{1}{a}\int_0^a \left[1 - \cos\left(\frac{4\pi x}{a}\right)\right]dx \\
&= \frac{1}{a}\left[x\right]_{x=0}^{x=a} - \frac{1}{a}\left[\left(\frac{a}{4\pi}\right)\sin\left(\frac{4\pi x}{a}\right)\right]_{x=0}^{x=a} \\
&= 1 \qquad (1)
\end{aligned}$$

となり、規格化されている。

b. (通常、採用されている座標表示では) 運動量演算子 $\hat{p} = (\hbar/\mathrm{i})d/dx$ であり、演算子の期待値の定義より

$$\begin{aligned}
<\hat{p}>_2 &\equiv \int_0^a \psi_2^*(x)\cdot\hat{p}\cdot\psi_2(x)dx = \frac{2}{a}\int_0^a \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\cdot\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{d}{dx}\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)dx \\
&= \frac{4\pi\hbar}{\mathrm{i}a^2}\int_0^a \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)dx = \frac{4\pi\hbar}{\mathrm{i}a^2}\int_0^a \frac{1}{2}\sin\left(\frac{4\pi x}{a}\right)dx \\
&= \frac{2\pi\hbar}{\mathrm{i}a^2}\frac{a}{4\pi}\left[-\cos\left(\frac{4\pi x}{a}\right)\right]_{x=0}^{x=a} = 0 \\
\rightarrow <\hat{p}>_2 &= 0 \qquad (2)
\end{aligned}$$

と求まる。