(3 次元系における角運動量演算子 1:angularmomentum-3D1-qa20200626.tex)

3 次元系における角運動量演算子についての次の問いに答えよ。ただし、ディラック定数を $\hbar \equiv h/(2\pi)$ とし、座標演算子と運動量演算子の間には次の正準交換関係が成立し、他の交換関係はゼロとせよ。

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = \mathrm{i}\hbar, [\hat{y}, \hat{p}_y] = \mathrm{i}\hbar, [\hat{z}, \hat{p}_z] = \mathrm{i}\hbar. \tag{1}$$

ここで，任意の演算子 $\hat{A}, \hat{B}$ に対して，交換関係は $[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ と定義される．

1. 角運動量演算子の x, y, z 成分、$\hat{\ell}_x, \hat{\ell}_y, \hat{\ell}_z$ の座標表示を記せ。
2. 交換関係 $[\hat{\ell}_x, \hat{\ell}_y] = \mathrm{i}\hbar\hat{\ell}_z$ を証明せよ．

（解答例）

1. 運動量演算子の x, y, z 成分,$\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z$ の座標表示は

$$\hat{p}_x = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x}, \hat{p}_y = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial y}, \hat{p}_z = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial z} \tag{2}$$

と表される。角運動量演算子の x, y, z 成分 $\hat{\ell}_x, \hat{\ell}_y, \hat{\ell}_z$ の座標表示は

$$\hat{\ell}_x \equiv \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right), \tag{3}$$

$$\hat{\ell}_y \equiv \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right), \tag{4}$$

$$\hat{\ell}_z \equiv \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right). \tag{5}$$

2. 位置座標 x, y, z の任意の関数 $f(x, y, z)(\equiv f)$ を考えて、2 種の角運動量演算子の積を左から作用させると

$$\begin{aligned}\hat{\ell}_x\hat{\ell}_y f &= -\hbar^2\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(z\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial z}\right) \\ &= -\hbar^2\left(y\frac{\partial f}{\partial x} + yz\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x} - xy\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - z^2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} + xz\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\right),\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}-\hat{\ell}_y\hat{\ell}_x f &= \hbar^2\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(y\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ &= \hbar^2\left(yz\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x} - z^2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} - xy\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + x\frac{\partial f}{\partial y} + zx\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\right)\end{aligned} \tag{7}$$

となる．これらの辺々を加えると

$$[\hat{\ell}_x, \hat{\ell}_y]f = -\hbar^2\left(y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \mathrm{i}\hbar\hat{\ell}_z f \tag{8}$$

となり、関数 f は任意であるから、$[\hat{\ell}_x, \hat{\ell}_y] = \mathrm{i}\hbar\hat{\ell}_z$ となる。

3. （備考）同様にして、輪環の順 $(x \to y, y \to z, z \to x)$ に添え字を順次変化させれば，$[\hat{\ell}_y, \hat{\ell}_z] = \mathrm{i}\hbar\hat{\ell}_x, [\hat{\ell}_z, \hat{\ell}_x] = \mathrm{i}\hbar\hat{\ell}_y$ も証明できる。このように，3 つの角運動量演算子はお互いに交換しないので、これら 3 つの角運動量演算子の同時固有状態は存在しないことを意味する。