(３次元系における角運動量演算子 2:angularmomentum-3D2-qa20200625.tex)
３次元系における角運動量演算子についての次の問いに答えよ。ただし、ディラック定数を $\hbar \equiv h/(2\pi)$ とし、座標と運動量演算子の間には次の正準交換関係が成立する。

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = \mathrm{i}\hbar, [\hat{y}, \hat{p}_y] = \mathrm{i}\hbar, [\hat{z}, \hat{p}_z] = \mathrm{i}\hbar. \tag{1}$$

(位置演算子と運動量演算子の間の他の交換関係はゼロである。)

位置演算子は $\hat{x} = x, \hat{y} = y, \hat{z} = z$ であり、運動量演算子の x, y, z 成分,$\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z$ は次のように表される。

$$\hat{p}_x = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x}, \hat{p}_y = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial y}, \hat{p}_z = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial z} \tag{2}$$

1. 角運動量演算子の x, y, z 成分 $\hat{\ell}_x, \hat{\ell}_y, \hat{\ell}_z$ を記せ。
2. 角運動量演算子の間の交換関係 $[\hat{\ell}_x, \hat{\ell}_y] = \mathrm{i}\hbar\hat{\ell}_z, [\hat{\ell}_y, \hat{\ell}_z] = \mathrm{i}\hbar\hat{\ell}_x, [\hat{\ell}_z, \hat{\ell}_x] = \mathrm{i}\hbar\hat{\ell}_y$ を用いて、角運動量 2 乗演算子 $\hat{\boldsymbol{\ell}}^2$ との交換関係 $[\hat{\boldsymbol{\ell}}^2, \hat{\ell}_x], [\hat{\boldsymbol{\ell}}^2, \hat{\ell}_y], [\hat{\boldsymbol{\ell}}^2, \hat{\ell}_z]$ を求め、その結果の意味を述べよ。ただし、$\hat{\boldsymbol{\ell}}^2 \equiv \hat{\ell}_x^2 + \hat{\ell}_y^2 + \hat{\ell}_z^2$ である。

（解答例）

1. 角運動量演算子（の直交直線座標表示）の x, y, z 成分 $\hat{\ell}_x, \hat{\ell}_y, \hat{\ell}_z$ は

$$\begin{aligned} \hat{\ell}_x &= \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y \\ &= \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right), \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \hat{\ell}_y &= \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z \\ &= \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right), \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \hat{\ell}_z &= \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x \\ &= \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) \end{aligned} \tag{5}$$

と表される。

2. 初めに、$\hat{\boldsymbol{\ell}}^2$ と $\hat{\ell}_x$ との交換関係

$$\begin{aligned} [\hat{\boldsymbol{\ell}}^2, \hat{\ell}_x] &= [\hat{\ell}_x^2 + \hat{\ell}_y^2 + \hat{\ell}_z^2, \hat{\ell}_x] \\ &= [\hat{\ell}_x^2, \hat{\ell}_x] + [\hat{\ell}_y^2, \hat{\ell}_x] + [\hat{\ell}_z^2, \hat{\ell}_x] \end{aligned} \tag{6}$$

を計算する。まず

$$\begin{aligned} [\hat{\ell}_x^2, \hat{\ell}_x] &= \hat{\ell}_x^3 - \hat{\ell}_x^3 \\ &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

は自明であろう。次に

$$
\begin{aligned}
[\hat{\ell}_y^2, \hat{\ell}_x] &= \hat{\ell}_y^2\hat{\ell}_x - \hat{\ell}_x\hat{\ell}_y^2 \\
&= \hat{\ell}_y(\hat{\ell}_y\hat{\ell}_x) - (\hat{\ell}_x\hat{\ell}_y)\hat{\ell}_y
\end{aligned} \tag{8}
$$

となる。右辺における演算子の次数を下げるために、与えられた交換関係 $[\hat{\ell}_x, \hat{\ell}_y] = \mathrm{i}\hbar\hat{\ell}_z$ より得られる

$$
\hat{\ell}_y\hat{\ell}_x = \hat{\ell}_x\hat{\ell}_y - \mathrm{i}\hbar\hat{\ell}_z \tag{9}
$$

と

$$
\hat{\ell}_x\hat{\ell}_y = \hat{\ell}_y\hat{\ell}_x + \mathrm{i}\hbar\hat{\ell}_z \tag{10}
$$

を前式 (8) の右辺に代入すると

$$
\begin{aligned}
[\hat{\ell}_y^2, \hat{\ell}_x] &= \hat{\ell}_y(\hat{\ell}_x\hat{\ell}_y - \mathrm{i}\hbar\hat{\ell}_z) - (\hat{\ell}_y\hat{\ell}_x + \mathrm{i}\hbar\hat{\ell}_z)\hat{\ell}_y \\
&= -\mathrm{i}\hbar(\hat{\ell}_y\hat{\ell}_z + \hat{\ell}_z\hat{\ell}_y)
\end{aligned} \tag{11}
$$

となる。同様に

$$
\begin{aligned}
[\hat{\ell}_z^2, \hat{\ell}_x] &= \hat{\ell}_z^2\hat{\ell}_x - \hat{\ell}_x\hat{\ell}_z^2 \\
&= \hat{\ell}_z(\hat{\ell}_x\hat{\ell}_z + \mathrm{i}\hbar\hat{\ell}_y) - (\hat{\ell}_z\hat{\ell}_x - \mathrm{i}\hbar\hat{\ell}_y)\hat{\ell}_z \\
&= \mathrm{i}\hbar(\hat{\ell}_y\hat{\ell}_z + \hat{\ell}_z\hat{\ell}_y)
\end{aligned} \tag{12}
$$

となる。式 (11) と式 (12) を式 (6) の右辺に代入すると

$$
[\hat{\boldsymbol{\ell}}^2, \hat{\ell}_x] = 0 \tag{13}
$$

が得られる。他も同様にして、$[\hat{\boldsymbol{\ell}}^2, \hat{\ell}_y] = [\hat{\boldsymbol{\ell}}^2, \hat{\ell}_z] = 0$ となる。

このように, 角運動量 2 乗演算子と三つの角運動量演算子のそれぞれとは交換するので、同時固有状態は存在する。ただし、三つの角運動量演算子はお互いには交換しないので、角運動量演算子の二つの成分間には同時固有関数は存在しない。以上のことから、角運動量 2 乗演算子 $\hat{\boldsymbol{\ell}}^2$ と角運動量演算子の成分のひとつを任意に選ぶと同時固有関数が存在する。通常は角運動量演算子の任意の成分として z 成分、$\hat{\ell}_z$ を選ぶ。