(３次元系における角運動量演算子 3:angularmomentum-3D3-QA20200626A.tex)

1. 演算子 $\hat{A},\hat{B},\hat{C},\hat{D}$ に対して、分配則
$$[\hat{A}+\hat{B},\hat{C}+\hat{D}]=[\hat{A},\hat{C}]+[\hat{A},\hat{D}]+[\hat{B},\hat{C}]+[\hat{B},\hat{D}] \tag{1}$$
が成立することを証明せよ．

2. 角運動量演算子の間の正準交換関係 $[\hat{\ell}_x,\hat{\ell}_y]=\mathrm{i}\hbar\hat{\ell}_z, [\hat{\ell}_y,\hat{\ell}_z]=\mathrm{i}\hbar\hat{\ell}_x, [\hat{\ell}_z,\hat{\ell}_x]=\mathrm{i}\hbar\hat{\ell}_y$ と昇降演算子，$\hat{\ell}_\pm\equiv\hat{\ell}_x\pm\mathrm{i}\hat{\ell}_y$(複合同順) を用いて以下の関係式を証明せよ．ただし，ディラック定数を $\hbar\equiv h/(2\pi)$ とする．
   (a) $\hat{\ell}_-\hat{\ell}_+=\hat{\ell}_x^2+\hat{\ell}_y^2-\hbar\hat{\ell}_z$
   (b) $\hat{\ell}_+\hat{\ell}_-=\hat{\ell}_x^2+\hat{\ell}_y^2+\hbar\hat{\ell}_z$
   (c) $\hat{\ell}_x^2+\hat{\ell}_y^2=\frac{1}{2}(\hat{\ell}_-\hat{\ell}_++\hat{\ell}_+\hat{\ell}_-)$
   (d) $[\hat{\ell}_z,\hat{\ell}_\pm]=\pm\hbar\hat{\ell}_\pm$
   (e) $[\hat{\ell}_+,\hat{\ell}_-]=2\hbar\hat{\ell}_z$

（解答例）

1. 題意より、与えられた式の左辺を以下のように変形できる。
$$\begin{aligned}[\hat{A}+\hat{B},\hat{C}+\hat{D}]&=(\hat{A}+\hat{B})(\hat{C}+\hat{D})-(\hat{C}+\hat{D})(\hat{A}+\hat{B})\\&=\hat{A}\hat{C}+\hat{A}\hat{D}+\hat{B}\hat{C}+\hat{B}\hat{D}-\hat{C}\hat{A}-\hat{C}\hat{B}-\hat{D}\hat{A}-\hat{B}\hat{B}\\&=(\hat{A}\hat{C}-\hat{C}\hat{A})+(\hat{A}\hat{D}-\hat{D}\hat{A})+(\hat{B}\hat{C}-\hat{C}\hat{B})+(\hat{B}\hat{D}-\hat{D}\hat{B})\\&=[\hat{A},\hat{C}]+[\hat{A},\hat{D}]+[\hat{B},\hat{C}]+[\hat{B},\hat{D}].\end{aligned} \tag{2}$$
よって、演算子 $\hat{A},\hat{B},\hat{C},\hat{D}$ に対する分配則は証明された。

2. 題意より、それぞれの関係式の左辺を変形して、左辺と同じくなるかどうかを調べる．
   (a)
$$\begin{aligned}\hat{\ell}_-\hat{\ell}_+&=(\hat{\ell}_x-\mathrm{i}\hat{\ell}_y)(\hat{\ell}_x+\mathrm{i}\hat{\ell}_y)\\&=\hat{\ell}_x^2+\mathrm{i}\hat{\ell}_x\hat{\ell}_y-\mathrm{i}\hat{\ell}_y\hat{\ell}_x+\hat{\ell}_y^2\\&=\hat{\ell}_x^2+\hat{\ell}_y^2+\mathrm{i}[\hat{\ell}_x,\hat{\ell}_y]\\&=\hat{\ell}_x^2+\hat{\ell}_y^2+\mathrm{i}^2\hbar\hat{\ell}_z\\&=\hat{\ell}_x^2+\hat{\ell}_y^2-\hbar\hat{\ell}_z.\end{aligned} \tag{3}$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\hat{\ell}_+\hat{\ell}_- &= (\hat{\ell}_x + \mathrm{i}\hat{\ell}_y)(\hat{\ell}_x - \mathrm{i}\hat{\ell}_y) \\
&= \hat{\ell}_x^2 - \mathrm{i}\hat{\ell}_x\hat{\ell}_y + \mathrm{i}\hat{\ell}_y\hat{\ell}_x + \hat{\ell}_y^2 \\
&= \hat{\ell}_x^2 + \hat{\ell}_y^2 - \mathrm{i}[\hat{\ell}_x, \hat{\ell}_y] \\
&= \hat{\ell}_x^2 + \hat{\ell}_y^2 - \mathrm{i}^2\hbar\hat{\ell}_z \\
&= \hat{\ell}_x^2 + \hat{\ell}_y^2 + \hbar\hat{\ell}_z. \qquad (4)
\end{aligned}
$$

(c) 前問 (a),(b) の結果を辺々加えると

$$
\begin{aligned}
\hat{\ell}_-\hat{\ell}_+ + \hat{\ell}_+\hat{\ell}_- &= 2(\hat{\ell}_x^2 + \hat{\ell}_y^2) \\
\to \hat{\ell}_x^2 + \hat{\ell}_y^2 &= \frac{1}{2}(\hat{\ell}_-\hat{\ell}_+ + \hat{\ell}_+\hat{\ell}_-). \qquad (5)
\end{aligned}
$$

(d)

$$
\begin{aligned}
[\hat{\ell}_z, \hat{\ell}_\pm] &= \hat{\ell}_z(\hat{\ell}_x \pm \mathrm{i}\hat{\ell}_y) - (\hat{\ell}_x \pm \mathrm{i}\hat{\ell}_y)\hat{\ell}_z \\
&= \hat{\ell}_z\hat{\ell}_x - \hat{\ell}_x\hat{\ell}_z \pm \hat{\ell}_z\mathrm{i}\hat{\ell}_y \mp \mathrm{i}\hat{\ell}_y\hat{\ell}_z \\
&= [\hat{\ell}_z, \hat{\ell}_x] \mp \mathrm{i}[\hat{\ell}_y, \hat{\ell}_z] \\
&= \mathrm{i}\hbar\hat{\ell}_y \mp \mathrm{i}^2\hbar\hat{\ell}_x \\
&= \pm\hbar(\hat{\ell}_x \pm \mathrm{i}\hat{\ell}_y) \\
&= \pm\hbar\hat{\ell}_\pm. \qquad (6)
\end{aligned}
$$

(e)

$$
\begin{aligned}
[\hat{\ell}_+, \hat{\ell}_-] &= (\hat{\ell}_x + \mathrm{i}\hat{\ell}_y)(\hat{\ell}_x - \mathrm{i}\hat{\ell}_y) - (\hat{\ell}_x - \mathrm{i}\hat{\ell}_y)(\hat{\ell}_x + \mathrm{i}\hat{\ell}_y) \\
&= (\hat{\ell}_x^2 - \mathrm{i}\hat{\ell}_x\hat{\ell}_y + \mathrm{i}\hat{\ell}_y\hat{\ell}_x + \hat{\ell}_y^2) - (\hat{\ell}_x^2 + \mathrm{i}\hat{\ell}_x\hat{\ell}_y - \mathrm{i}\hat{\ell}_y\hat{\ell}_x + \hat{\ell}_y^2) \\
&= -2\mathrm{i}\hat{\ell}_x\hat{\ell}_y + 2\mathrm{i}\hat{\ell}_y\hat{\ell}_x \\
&= -2\mathrm{i}[\hat{\ell}_x, \hat{\ell}_y] \\
&= -2\mathrm{i}^2\hbar\hat{\ell}_z \\
&= 2\hbar\hat{\ell}_z. \qquad (7)
\end{aligned}
$$