(位置演算子、運動量演算子の交換関係)commuation1-qa20200525.tex

座標 $\hat{x}$ とその正準共役運動量 $\hat{p}_x$ は正準交換関係

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = \mathrm{i}\hbar \tag{1}$$

を満たす。ただし、プランク定数を h、ディラック定数を $\hbar \equiv h/(2\pi)$ とする。

1. （座標表示で）演算子 $\hat{x}, \hat{p}_x$ を具体的に表せ。
2. 正準交換関係が成立することを証明せよ。
3. 演算子 $\hat{p}_x \equiv p, \hat{x} = \mathrm{i}\hbar d/dp$ という表現 (運動量表示) が正準交換関係を満たすかどうか調べよ.

(ヒント) 二つの演算子 $\hat{A}, \hat{B}$ の積（演算子）$\hat{A}\hat{B}$ をある関数 $f(x)$ に作用させることはまず演算子 $\hat{B}$ を左から $f(x)$ に作用させ、続いて同じく左から演算子 $\hat{A}$ をさせることと定義する。すなわち、式で表すと $\hat{A}\hat{B}f(x) \equiv \hat{A}(B\hat{f}(x))$.

(解答例)

1.

$$\hat{x} = x, \tag{2}$$

$$\hat{p}_x = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{d}{dx} \tag{3}$$

2. $\psi(x)$ を微分可能な任意の波動関数とする。交換関係の定義より

$$[\hat{x}, \hat{p}_x]\psi(x) = \hat{x}\hat{p}_x\psi(x) - \hat{p}_x\hat{x}\psi(x). \tag{4}$$

ここで、第 1 項、2 項を関数の積の微分に注意しながら、それぞれ計算すると

$$\hat{x}\hat{p}_x\psi(x) = \hat{x}\{\hat{p}_x\psi(x)\} = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}x\frac{d\psi(x)}{dx}, \tag{5}$$

$$\hat{p}_x\{x\psi(x)\} = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{d}{dx}\{x\psi(x)\} = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\psi(x) + \frac{\hbar}{\mathrm{i}}x\frac{d\psi(x)}{dx} \tag{6}$$

が得られる。これらの結果 (5,6) を式 (4) 代入すると

$$[\hat{x}, \hat{p}_x]\psi(x) = \mathrm{i}\hbar\psi(x). \tag{7}$$

ここで $\psi(x)$ は任意であるから、式（1）が成立する。

3. 変数 p について，微分可能な任意の関数 $\phi(p)$ に対して前問と同様の計算を行うと

$$\begin{aligned}[\hat{x}, \hat{p}_x]\phi(p) &= \hat{x}(\hat{p}_x\phi(p)) - \hat{p}_x(\hat{x}\phi(p)) \\ &= \mathrm{i}\hbar\frac{d}{dp}(p\phi(p)) - p\mathrm{i}\hbar\frac{d\phi(p)}{dp} \\ &= \mathrm{i}\hbar\phi(p). \end{aligned} \tag{8}$$

ここで $\phi(p)$ は任意であるから、式（1）が成立する。