

1. 次の関数のうち、演算子 d/dx の固有関数はどれか。固有関数の場合に、固有値を求めよ。

$$ax + b, x^2, \sin(ax), e^{ax}, e^{ax^2}, xe^{ax}, (a, b : \text{定数}) \quad (1)$$

2. 次の関数のうち、演算子 d^2/dx^2 の固有関数はどれか。固有関数の場合に、固有値を求めよ。

$$\sin(ax), \cos(ax), e^{ax}, e^{iax}, e^{ax^2}, xe^{ax}, (a, b : \text{定数}). \quad (2)$$

(解答例) 演算子 \hat{A} の固有値を a (変数 x には依存しない定数), 固有関数を $\phi(x)$ とすると、

$$\hat{A}\phi(x) = a\phi(x) \quad (3)$$

のように、元の関数に比例する。

1. $\hat{A} = \frac{d}{dx}$ の場合 :

- (a) $\frac{d}{dx}(ax + b) = a$:固有関数ではない。
- (b) $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$:固有関数ではない。
- (c) $\frac{d}{dx}(\sin(ax)) = a \cos(ax)$. :固有関数ではない。
- (d) $\frac{d}{dx}(e^{ax}) = a(e^{ax})$:固有関数である。固有値は a である。
- (e) $\frac{d}{dx}(e^{ax^2}) = 2ax(e^{ax^2})$:固有関数ではない。
- (f) $\frac{d}{dx}(xe^{ax}) = e^{ax} + axe^{ax}$:固有関数ではない。

2. $\hat{A} = \frac{d^2}{dx^2}$ の場合 :

- (a) $\frac{d^2}{dx^2}[\sin(ax)] = -a^2[\sin(ax)]$.:固有関数であり、固有値は $-a^2$ である。
- (b) $\frac{d^2}{dx^2}[\cos(ax)] = -a^2[\cos(ax)]$.:固有関数であり、固有値は $-a^2$ である。
- (c) $\frac{d^2}{dx^2}(e^{ax}) = a^2(e^{ax})$. 固有関数であり、固有値は a^2 である。
- (d) $\frac{d^2}{dx^2}(e^{iax}) = -a^2(e^{iax})$. 固有関数であり、固有値は $-a^2$ である。
- (e) $\frac{d^2}{dx^2}(e^{ax^2}) = (2a + 4a^2x^2)e^{ax^2}$. 固有関数ではない。
- (f) $\frac{d^2}{dx^2}(xe^{ax}) = \frac{d}{dx}[(ax + 1)e^{ax}] = (a^2x + 2a)e^{ax}$. 固有関数ではない。