

1次元系 (x 軸) における自由粒子 (質量 m) についての以下の問題に答えよ。

1. 波数 k をもつ, 右向きに進む自由粒子の波動関数の空間部分 $\psi_k(x)$ を記せ。規格化定数を C とせよ。
2. 自由粒子の波動関数に長さ L の周期的境界条件をつけた場合の波数とエネルギーを求めよ。得られた結果の特徴を述べよ。
3. 自由粒子の波動関数に対して、長さ L の箱型規格化を行った場合、規格化定数をもとめよ。

(解答例)

1. 題意より $\psi_k(x) = C \cdot e^{ikx} (= C[\cos(kx) + i \sin(kx)])$, $i \equiv \sqrt{-1}$.

2. 題意より

$$\begin{aligned}\psi_k(x+L) &= \psi_k(x) \rightarrow e^{ik(x+L)} = e^{ikx} \\ \rightarrow kL &= 2n\pi, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \\ \rightarrow k_n &\equiv \left(\frac{2\pi}{L}\right)n, \quad (1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E_n &\equiv \frac{(\hbar k_n)^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 n^2 \\ \rightarrow E_n &= \left(\frac{2\pi^2 \hbar^2}{mL^2}\right) n^2 \quad (2)\end{aligned}$$

波数、エネルギーともに離散的な値しかとれない、すなわち量子化される。

3. 題意より

$$\begin{aligned}1 &= \int_0^L \psi_k^*(x) \psi_k(x) dx \\ &= C^2 \times L \\ \rightarrow C &= \frac{1}{\sqrt{L}}. \quad (3)\end{aligned}$$