(縮退した2準位系の固有値問題)hamil2x2-degenerate-1-qa20180501A.tex

固有状態が2つ（$\phi_1(x), \phi_2(x)$）しかない系（2準位系）において、エネルギーが縮退した（エネルギーゼロとする）場合を考える。

1. ハミルトニアン行列 $\hat{H}$ が

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} 0 & -V \\ -V & 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

と表されているとする。ここで，$V > 0$ であるとする。すなわち、相互作用は引力的であるとして，このハミルトニアン行列の固有値と対応する規格化された固有ベクトルを求めよ．

2. 縮退した2準位系のハミルトニアンの固有値、固有ベクトルの性質についていえることを述べよ．

(解答例)

1. シュレディンガー方程式を

$$\hat{H}|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle,\ |\Psi\rangle \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{2}$$

とおくと

$$\to \begin{pmatrix} 0 & -V \\ -V & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\to -Vy = Ex \tag{4}$$

$$-Vx = Ey \tag{5}$$

規格化条件

$$x^2 + y^2 = 1. \tag{6}$$

式(3)より、自明な解$(x = y = 0)$以外の解が存在するためには、すべての項を右辺または左辺に移動した同次連立方程式の係数を行列要素とする行列の行列式がゼロでなければならない。すなわち、

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} E & V \\ V & E \end{vmatrix} = E^2 - V^2 \\ \to E &= \pm V. \end{aligned} \tag{7}$$

ここで，2 つの固有値とそれらに属する固有ベクトルをそれぞれ

$$E_1 \equiv -V,\ |\Psi_1\rangle \ \equiv \ \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},\ E_2 \equiv -V,\ |\Psi_2\rangle \equiv \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \tag{8}$$

とラベル付けする．式 (7) より、固有値 $E_1 = -V$ に対して式 (4), (5) より

$$\begin{cases} -Vy_1 = (-V)x_1 \\ -Vx_1 = (-V)y_1 \end{cases} \tag{9}$$

$$\rightarrow x_1 \ = \ y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{10}$$

$$|\Psi_1\rangle \ = \ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

固有値 $E_2 = +V$ の場合に対しても同様に

$$\begin{cases} -Vy_2 = (+V)x_2 \\ -Vx_2 = (+V)y_2 \end{cases} \tag{12}$$

$$\rightarrow x_2 \ = \ -y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{13}$$

$$|\Psi_2\rangle \ = \ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

2. (a) 縮退した 2 準位系の固有エネルギーは相互作用により，相互作用の絶対値の 2 倍の大きさで分岐する．

   (b) 相互作用が引力的な場合の縮退した 2 準位系の波動関数について，エネルギーの低い固有状態の波動関数の成分は 同位相 で，エネルギーの高い固有状態の波動関数の成分は 逆位相 となる．

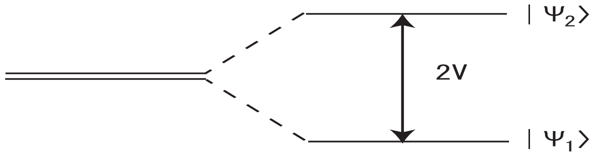

図 1: 縮退した 2 準位系の相互作用によるエネルギー分岐