(調和振動子における不確定性関係)harmonic-uncertainty-qa20190507.tex

調和振動子系において，質量 m の粒子の位置の不確定さを Δx，運動量の不確定さを Δp_x をもつエネルギーの最小値を以下の手順で求めよ．プランク定数 h から定義されるディラック定数を $\hbar(\equiv h/2\pi)$，角振動数を ω とする．

1. この粒子の座標を Δx，運動量を Δp_x として, この系の力学的エネルギー E をこれらと m, ω で表せ．
2. 位置と運動量の不確定性関係を記せ．
3. 前問の結果を用いて，エネルギー E を Δx(または Δp_x) の関数として表し，その最小値を与える Δx(または Δp_x) を求めよ。
4. 前問の結果を用いてエネルギーの最小値を求め，1 次元の調和振動子系のエネルギー固有値と比較せよ。

(解答例)

1. 力学的エネルギー E は運動エネルギーと弾性によるポテンシャルの和であると考えて

$$E = \frac{(\Delta p_x)^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(\Delta x)^2. \tag{1}$$

2. 題意より

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}. \tag{2}$$

3. 位置と運動量の最小の不確定性より $\Delta p_x = \hbar/(2\Delta x)$ をエネルギーの式に代入すると

$$E = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{2\Delta x}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2(\Delta x)^2 = \left(\frac{\hbar^2}{8m}\right)\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{2}m\omega^2(\Delta x)^2. \tag{3}$$

となる。すなわち、E は変数 Δx の関数とみなせる。ここで，E の値が極 (小) 値となる Δx を求める。

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{dE}{d(\Delta x)} \\
&= \left(\frac{\hbar^2}{8m}\right)\frac{-2}{(\Delta x)^3} + m\omega^2(\Delta x) = \frac{m\omega^2}{(\Delta x)^3}\left[(\Delta x)^4 - \frac{\hbar^2}{4m^2\omega^2}\right] \\
&= \frac{m\omega^2}{(\Delta x)^3}\left[(\Delta x)^2 + \frac{\hbar}{2m\omega}\right]\left[\Delta x + \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\right]\left[\Delta x - \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\right] \\
\to \Delta x &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}. \qquad (4)
\end{aligned}$$

4. 前問題の解を力学的エネルギーの式に代入すると

$$E = \left(\frac{\hbar^2}{8m}\right)\frac{2m\omega}{\hbar} + \frac{1}{2}m\omega^2\frac{\hbar}{2m\omega} = \frac{\hbar\omega}{2}. \tag{5}$$

これは1次元の調和振動子系のエネルギー固有値 $\hbar\omega(n+1/2),\ n=0,1,2,\cdots$ の最小値と同じである。すなわち、1次元の調和振動子系の基底状態は位置と運動量の最小不確定の状態である。

5. (別解1）位置と運動量の最小の不確定性より，$\Delta x = \hbar/(2\Delta p_x)$ をエネルギーの式に代入すると

$$E = \frac{1}{2}\left[\frac{(\Delta p_x)^2}{m} + \frac{m\hbar^2\omega^2}{4(\Delta p_x)^2}\right] \tag{6}$$

となる。ここで、極（小）値となる Δp_x を求める。

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dE}{d(\Delta p_x)} \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{2\Delta p_x}{m} + (-2)\frac{m\hbar^2\omega^2}{4(\Delta p_x)^3}\right] = \frac{1}{m(\Delta p_x)^3}\left[(\Delta p_x)^4 - \frac{(m\hbar\omega)^2}{4}\right] \\ &= \frac{1}{m(\Delta p_x)^3}\left[(\Delta p_x)^2 + \frac{m\hbar\omega}{2}\right]\left[(\Delta p_x)^2 - \frac{m\hbar\omega}{2}\right] \\ \to \Delta p_x &= \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}},\ \left(\frac{(\Delta p_x)^2}{2m} = \frac{\hbar\omega}{4}\right) \end{aligned} \tag{7}$$

6. (別解2）エネルギーの式に前問題の解を代入すると

$$E = \frac{1}{2}\left[\frac{\frac{m\hbar\omega}{2}}{m} + \frac{m\hbar^2\omega^2}{4\frac{m\hbar\omega}{2}}\right] = \frac{\hbar\omega}{2}. \tag{8}$$

これは1次元の調和振動子系のエネルギー固有値 $\hbar\omega(n+1/2),\ n=0,1,2,\cdots$ の最小値と同じである。すなわち、1次元の調和振動子系の基底状態は位置と運動量の最小不確定の状態である。