

水素原子のボーア半径の計算:hydrogen-radius-cal-qa140607.tex

水素原子のボーア半径 a_B と基底状態のエネルギー E_1 が次の式で与えられている。

$$a_B = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2}, \quad E_1 = -\frac{me^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2}. \quad (1)$$

以下の定数の組み合わせの値を用いて、 a_B , E_1 の値を計算せよ。

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = \frac{c\hbar}{137}, \quad c\hbar = 1.97 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{\AA}, \quad mc^2 = 0.511 \times 10^6 \text{ eV}. \quad (2)$$

(解答例)

題意より、与えられた定数の組み合わせを用いるように、 a_B の式を書き直してから数値を代入する。

$$\begin{aligned} a_B &= \left(\frac{4\pi\epsilon_0}{e^2} \right) \frac{(c\hbar)^2}{mc^2} = 137 \times \frac{c\hbar}{mc^2} \\ &= 137 \times \frac{1.97 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{\AA}}{0.511 \times 10^6 \text{ eV}} = \frac{0.137 \times 1.97}{0.511} \text{\AA} \\ &= 0.528 \text{\AA}. \end{aligned} \quad (3)$$

同様に

$$\begin{aligned} E_1 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{m}{\hbar^2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{mc^2}{(c\hbar)^2} \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{c\hbar}{137} \right)^2 \frac{mc^2}{(c\hbar)^2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{137} \right)^2 mc^2 \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{137} \right)^2 \times 0.511 \times 10^6 \text{ eV} \\ &= -0.0000136 \times 10^6 \text{ eV} \\ &= -13.6 \text{ eV}. \end{aligned} \quad (4)$$