（無限量子井戸の中の光の波長）inf-well-ph-lamda20160517B.tex

幅 L の 1 次元無限量子井戸の中におかれた質量 m の粒子のとり得るエネルギーは

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}n^2\ ,\ (n = 1, 2, \cdots) \tag{1}$$

のように離散化される。ここでは c は光速,$\hbar = h/2\pi$ はディラック定数である。定数の具体的な数値が必要な場合、$c\hbar \approx 2 \times 10^3$ eV $\cdot$ Å, $mc^2 \approx 0.5 \times 10^6$eV, $\pi \approx 3,\ \pi^2 \approx 10$ を用いよ。

(a) 異なるエネルギー準位間 $(E_{n'}, E_n)$ の遷移の際に放出される光子の波長 $\lambda_{n'n}$ を求めよ。（$\lambda_{n'n}$ を c, m, L, h, n', n で表せ。）

(b) 幅 $L = 10^{-10}$m$(= 1\mathring{A})$ の場合、この無限量子井戸の中の電子の n=1,2 を持つ定常状態のとり得るエネルギーはそれぞれ何 eV になるか計算せよ．(ヒント：関係する数式を $c\hbar, mc^2$ を用いて書き直す.）

(c) 前問と同じ条件の場合、電子が $n' = 2$ から $n = 1$ の状態へ遷移する場合、放射される光子の波長 λ を (Å 単位で) 計算せよ。

(解答例)

(a) 波長 $\lambda_{n'n}$ を持つ光子のエネルギーは $ch/\lambda_{n'n}$ と表され、エネルギーの保存則より

$$E_{n'} - E_n = \frac{ch}{\lambda_{n'n}}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned}\lambda_{n'n} &= \frac{ch}{E_{n'} - E_n} \\ &= \frac{8mcL^2}{h(n'^2 - n^2)}\end{aligned}$$

(b)

$$E_n = \frac{h^2}{8mL^2}n^2$$

ここで

$$\begin{aligned}\frac{h^2}{8mL^2} &= \frac{4\pi^2(c\hbar)^2}{8(mc^2)L} \\ &\approx \frac{10 \times (2 \times 10^3\ \text{eV} \cdot \text{Å})^2}{8 \times (0.5 \times 10^6\text{eV}) \times (1\mathring{A})^2} \\ &= \frac{16 \times 10^7}{4 \times 10^6}\ \text{eV} = 40\ \text{eV}.\end{aligned} \tag{2}$$

よって

$$E_1 \approx 40 \text{ eV},\ \mathrm{E}_2 = 160 \text{ eV}. \tag{3}$$

(c) 前々問，前問の結果より

$$\begin{aligned} \frac{ch}{\lambda_{n'n}} &\approx 160 \text{ eV } - 40 \text{ eV } = 120 \text{ eV} \\ \to\ \lambda_{n'n} &= \frac{2\pi(c\hbar)}{120 \text{ eV}} \\ &\approx \frac{2\times 3\times(2\times 10^3 \text{ eV}\cdot\text{Å})}{120 \text{ eV}} \\ &= 100 \text{ Å}. \end{aligned} \tag{4}$$