一次元無限大井戸型ポテンシャル系エネルギー量子化:potential-infinite-energy-qa150222A.tex)
次のような一次元無限大井戸型ポテンシャルの中の量子的粒子（質量 $m$）について，以下の問に答えよ。ただし、プランク定数 $h$ により $\hbar \equiv h/2\pi$ を定義する

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (0 < x < a) \\ \infty & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

1. 井戸型ポテンシャルの内部におけるシュレディンガー方程式とその一般解を記せ。
2. 波動関数についての境界条件のもとで, 井戸型ポテンシャルの内部における、$n$ 番目のエネルギー固有値 $E_n$ を求めよ。
3. エネルギー量子化の効果の大きさはどの物理量にどのように依存するか述べよ。

（解答例）

1. 井戸型ポテンシャルの内部では、シュレディンガー方程式は
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi = E\psi(x). \tag{1}$$
と書ける。井戸型ポテンシャルの内部ではエネルギーは非負値であると考えてよいので、シュレディンガー方程式を書き直して
$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -k^2\psi(x),\ k \equiv \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \tag{2}$$
となる。この一般解は、任意定数を $A, B$ として、次のようになる。
$$\psi(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx) \tag{3}$$

2. 境界条件 $\psi(0) = 0, \psi(a) = 0$ より、それぞれ
$$0 = A, \tag{4}$$
$$0 = B\sin(ka), \tag{5}$$
$$\rightarrow \qquad ka = n\pi,\ (n = 1, 2, \cdots) \tag{6}$$
ゆえに、$k$ の値を式 (2) に代入してエネルギーは
$$E_n = \left(\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\right)n^2, (n = 1, 2, \cdots) \tag{7}$$
となる。すなわち、$\pi^2\hbar^2/(2ma^2)$ を単位とする離散的な値をとる (=量子化される)。$n = 0$ の場合は波動関数の値がゼロになり、$n < 0$ の値は波数 $k < 0$ となり、不適である。

3. エネルギーの量子化 (離散性) の効果は、$ma^2$ の値が小さいほど、すなわち、ポテンシャルの幅が小さいほど、または粒子の質量が小さいほど大きくなる。