(確率流れ密度)filename=probabilitycurrent-1-qa20160524A.tex

シュレディンガー方程式を満たす波動関数 $\psi(x)$ とその複素共役 $\psi^*(x)$ を用いて, 次のように定義される確率流れ密度 $J(\psi(x))$ について以下の問いに答えよ.

$$J(\psi(x)) = \frac{\hbar}{2m\mathrm{i}}\left[\psi^*(x)\frac{d\psi(x)}{dx} - \frac{d\psi^*(x)}{dx}\psi(x)\right] = \mathrm{Re}\left(\psi^*(x)\frac{\hat{p}_x}{m}\psi(x)\right). (\mathrm{Re}:\text{実数部分}) \quad (1)$$

1. 複素数の定数 A と実数の定数 k を用いて、波動関数が $\psi(x) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ と与えられる場合、確率流れ密度 $J(\psi(x))$ を計算せよ。
2. 複素数の定数 A, B と実数の定数 k を用いて、波動関数が $\psi(x) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$ と与えられる場合、確率流れ密度 $J(\psi(x))$ を計算せよ。

(解答例)

1. 題意より

$$\begin{aligned} \frac{d\psi(x)}{dx} &= \mathrm{i}kA\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx},\ \psi^*(x) = A^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \to \frac{d\psi^*(x)}{dx} = -\mathrm{i}kA^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}, &(2)\\ \to J(\psi(x)) &= \frac{\hbar k}{m}|A|^2. &(3)\end{aligned}$$

2. 前問と同様にして

$$\begin{aligned} \frac{d\psi(x)}{dx} &= \mathrm{i}k(A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} - B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}), &(4)\\ \psi^*(x) &= A^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} + B^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \to \frac{d\psi^*(x)}{dx} = -\mathrm{i}k(A^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} - B^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}), &(5)\\ \to J(\psi(x)) &= \frac{\hbar}{2m\mathrm{i}}[(A^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} + B^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}) \times \mathrm{i}k(A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} - B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx})\\ &\qquad +\mathrm{i}k(A^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} - B^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}) \times (A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx})]\\ &= \frac{\hbar}{2m\mathrm{i}} \times (\mathrm{i}k)[|A|^2 - A^*B\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}kx} + AB^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}kx} - |B|^2\\ &\qquad +|A|^2 + A^*B\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}kx} - AB^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}kx} - |B|^2]\\ \to J(\psi(x)) &= \frac{\hbar k}{m}(|A|^2 - |B|^2). &(6)\end{aligned}$$