時間依存のシュレディンガー方程式を満たす波動関数 $\Psi(x,t)$ とその複素共役から存在確率密度 $P \equiv \Psi^*(x,t)\Psi(x,t)$ を定義する。存在確率の保存則（連続の方程式）

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

を満たす確率流れ密度（probability current density）ベクトルの x 成分 J_x の式を求めよ。

(解答例) まず、ポテンシャル $U(x)$ の値は実数であるとして時間依存のシュレディンガー方程式とその複素共役を考える。

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} &= [-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + U(x,t)\Psi], & (2)\\ -i\hbar\frac{\partial\Psi^*}{\partial t} &= [-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi^*}{\partial x^2} + U(x,t)\Psi^*]. & (3)\end{aligned}$$

存在確率密度 $P \equiv \Psi^*(x,t)\Psi(x,t)$ を時間 t で微分して、式 (2,3）とその複素共役を代入すると

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial P}{\partial t} &= (i\hbar\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\Psi + \Psi^* i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t})\\ &= -[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi^*}{\partial x^2} + U(x,t)\Psi^*]\Psi + \Psi^*[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + U(x,t)\Psi]\\ &= -\frac{\hbar^2}{2m}[\Psi^*\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\Psi^*}{\partial x^2}\Psi]\\ &= \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial}{\partial x}[\frac{\partial\Psi^*}{\partial x}\Psi - \Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x}] \qquad (4)\end{aligned}$$

が得られる。式（4）の最終式の両辺における定数 $\hbar$ のべき乗の差に注意して、式（1）と（4）を比較すると、確率流れ密度ベクトルの x 成分 Jx は次のように得られる。

$$\begin{aligned} J_x &\equiv \frac{i\hbar}{2m}[\frac{\partial\Psi^*}{\partial x}\Psi - \Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x}] = \frac{\hbar}{2mi}[\frac{\partial\Psi}{\partial x}\Psi^* - \Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial x}]\\ &= \mathrm{Re}[\Psi^*\frac{\hbar}{im}\frac{\partial\Psi}{\partial x}] = \mathrm{Re}[\Psi^*\frac{\hat{p}_x}{m}\Psi],\ (\hat{p}_x \equiv \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}). \qquad (5)\end{aligned}$$

ここで、Re Z は複素数 Z の実数部分 (real part)、すなわち、$(Z+Z^*)/2$ の意味である。