1次元量子系の調和振動子

目次

made by R. Okamoto (Emeritus Prof., Kyushu Institute of Technology)
Filename=quantum-1dim-harmonic-oscillator20160520A.ppt

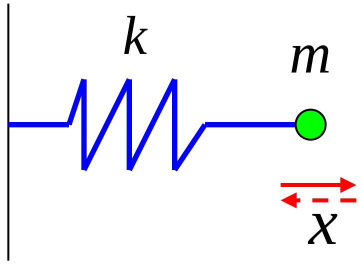
§1　古典的な調和振動子ー単振動ーの特徴と基本的性質

$$x(t) = A\sin(\omega t + \delta) = A\cos(\omega t + \delta')$$

振幅(amplitude)　A

角振動数 ω

振動数 f



$$\omega \equiv 2\pi f \rightarrow f \equiv \frac{\omega}{2\pi}$$

周期T　$x(t+T) = x(t) \rightarrow \omega T = 2\pi$

$$\rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

§2 単振動の微分方程式

ニュートンの運動方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad [m > 0, k > 0;\ x = x(t)]$$

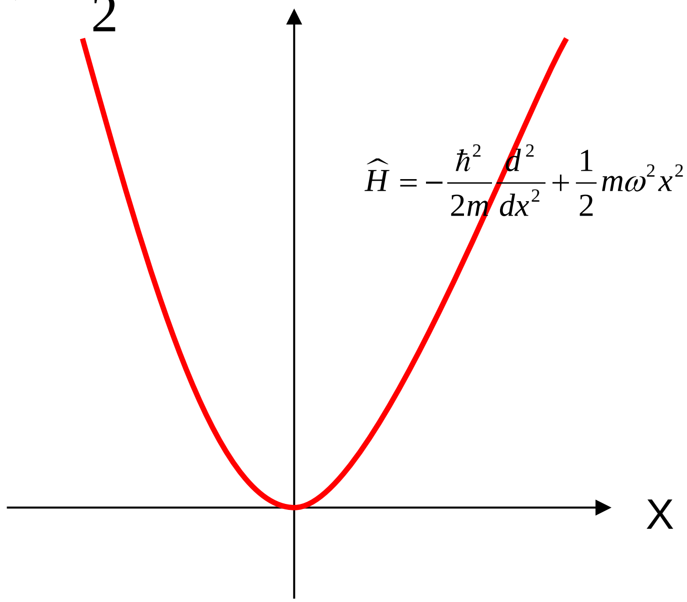
$\rightarrow$ ハミルトニアン

$$H = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$= \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, (p = mv, \omega \equiv \sqrt{k/m})$$

§３　量子調和振動子のハミルトニアンとシュレディンガー方程式

$$U(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$



ハミルトニアン

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

シュレディンガー方程式

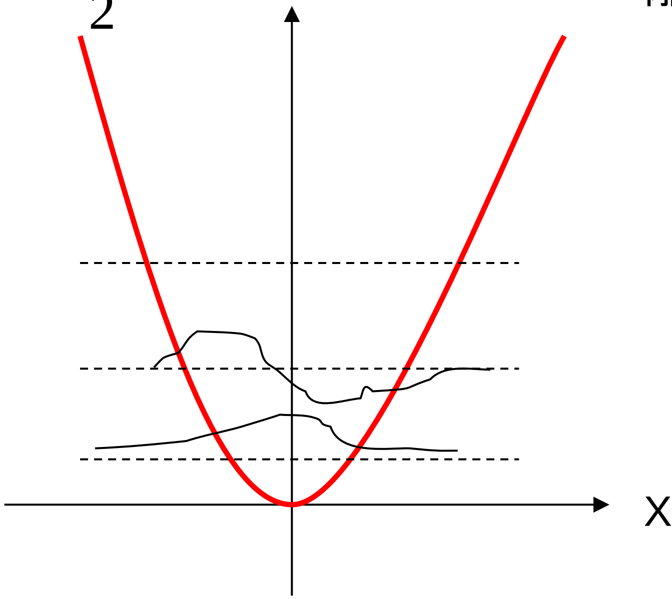
$$\hat{H}\psi(x) = E\psi(x)$$

波動関数についての境界条件

$$|\psi(x)| \to 0 \quad \text{as } |x| \to \infty$$

§４　量子調和振動子の解

$$U(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$



離散的エネルギー、等間隔

$$E_n = \hbar\omega(n + \tfrac{1}{2}), \quad (n = 0, 1, 2, \cdots, \infty)$$

$$\Delta E_n = \hbar\omega$$

零点エネルギー

$$E_0 = \tfrac{1}{2}\hbar\omega$$

波動関数　　　波動関数がポテンシャル壁内に浸透している！

$$\psi_n(x) \propto \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right) \cdot H_n(x/b)\,;\, b \equiv \sqrt{\hbar/(m\omega)},\ H_n(x):\text{エルミート多項式}$$

$$\psi_0(x) \propto \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right)$$

§5 量子調和振動子の別解—昇降演算子の方法

1次元調和振動子のハミルトニアン

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \hat{x}^2, \left(\hat{x} = x, \hat{p}_x = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\right) \cdots (5.1)$$

ここで，ハミルトニアンの無次元化を行う:

$$\frac{\hat{H}}{\hbar\omega} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m\hbar\omega} + \frac{1}{2\hbar\omega}m\omega^2 \hat{x}^2 = \left(\frac{\hat{p}_x}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x}\right)^2 \cdots (5.2)$$

次に，無次元の演算子(昇降演算子)を導入する

$$\hat{a} \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\hat{p}_x, \hat{a}^\dagger \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\hat{p}_x, \cdots (5.3)$$

$$\rightleftarrows \hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \hat{p}_x = \mathrm{i}\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a}) \cdots (5.4)$$

新しい交換関係

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = \mathrm{i}\hbar, [\hat{x}, \hat{x}] = [\hat{p}_x, \hat{p}_x] = 0 \cdots (5.5)$$

$$\to [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1, [\hat{a}, \hat{a}] = [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] = 0 \cdots (5.6)$$

調和振動子ハミルトニアンの別表現と交換関係

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^{\dagger}\hat{a} + \frac{1}{2}\right), \cdots (5.7)$$

$$\to [\hat{H}, \hat{a}^{\dagger}] = \hbar\omega\,\hat{a}^{\dagger}, [\hat{H}, \hat{a}] = -\hbar\omega\,\hat{a} \cdots (5.8)$$

昇降演算子

$$\hat{a}^{\dagger}\psi_n = \sqrt{n+1}\,\psi_{n+1}, \hat{a}\psi_n = \sqrt{n}\,\psi_{n-1}, \cdots (5.9)$$

$$\hat{a}\psi_0 = 0 \cdots (5.10)$$

$$(\hat{a}^{\dagger}\hat{a})\psi_n = n\psi_n \cdots (5.11)$$