（量子効果と熱運動）quantum-effect-thermal-qa20160517B.tex

幅 L の 1 次元無限量子井戸に閉じ込められた質量 m の粒子のとり得るエネルギーは

$$E_n = \left(\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\right) n^2 \ , \ (n = 1, 2, \cdots) \tag{1}$$

のように離散化される。ここで,h はプランク定数、$\hbar \equiv h/2\pi$ はディラック定数である。量子効果を見出すためには、量子化されたエネルギー間隔が熱運動による平均エネルギーよりも十分に大きくなければばならない。

1. 基底状態と第一励起状態のエネルギー間隔が $k_{\mathrm{B}}T$ よりも大きいという条件より、L が満たすべき条件式を求めよ。
2. ボルツマン定数として $k_{\mathrm{B}} \approx 1.4 \times 10^{-23}$J/K を用い、常温相当の温度 $T = 273 + 15$(K) の場合、$k_{\mathrm{B}}T$ の値を eV 単位で計算せよ。ここで、eV は電子ボルトで 1eV $\approx 1.6 \times 10^{-19}$J である。
3. 粒子の質量として電子質量を用いた場合、無限量子井戸の幅 L は約何オングストローム（Å）以下でなければばならないか。（Å は Å $= 10^{-10}$m である。）$c\hbar \approx 2.0 \times 10^3$ eV $\cdot$ Å, $mc^2 \approx 0.5 \times 10^6$eV, $\pi^2 \approx 10$ とする。
4. 半導体中の電子のように、質量が電子質量の 10 分の 1 である場合にはどうか。

(解答例)

1.

$$\begin{aligned} E_2 - E_1 &> k_{\mathrm{B}}T \to \left(\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\right) \times 3 > k_{\mathrm{B}}T \\ \to L < \sqrt{\frac{3\pi^2\hbar^2}{2mk_{\mathrm{B}}T}} \end{aligned} \tag{2}$$

2.

$$\begin{aligned} k_{\mathrm{B}}T &\approx 1.4 \times 10^{-23}\frac{\mathrm{eV}}{\mathrm{K}} \times 288\mathrm{K}\frac{1}{1.6 \times 10^{-19}} \\ &\approx 2.5 \times 10^{-2}\mathrm{eV}. \end{aligned} \tag{3}$$

3.

$$\begin{aligned} L &< \sqrt{\frac{3\pi^2\hbar^2}{2mk_{\mathrm{B}}T}} = \sqrt{\frac{3\pi^2(c\hbar)^2}{2(mc^2)k_{\mathrm{B}}T}} \\ &\approx \sqrt{\frac{3 \times 10(2.0 \times 10^3 \ \mathrm{eV} \cdot \text{Å})^2}{2(0.5 \times 10^6\mathrm{eV}) \times 2.5 \times 10^{-2}\mathrm{eV}}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{1.2}{2.5}} \times 10^2 \text{ Å} = 0.70 \times 10^2 \text{ Å} \\
\rightarrow L &< 0.70 \times 10^2 \text{ Å}. \qquad (4)
\end{aligned}
$$

4. 題意より

$$
\begin{aligned}
L &< 0.70 \times 10^2 \text{ Å} \times \sqrt{10} \\
\rightarrow L &< 2.2 \times 10^2 \text{ Å}. \qquad (5)
\end{aligned}
$$