（物質波の定常波条件とド･ブローイの関係を用いた無限量子井戸系の解法）filename=quantum-well-infinite-de-Broglie-qa20160517B.tex

幅 L の 1 次元無限量子井戸の中におかれた質量 m の電子のとり得るエネルギーをド・ブローイの物質波の考えを用いて導いてみよう。

1. 波長 λ の物質波が幅 L の中で定常波（定在波）となる条件を整数 n を用いて記せ。
2. 物質波の波長 λ と量子的粒子の運動量 p の関係を記せ。ただし、ディラック定数 $\hbar = h/(2\pi)$ を用いよ。
3. 以上の結果とエネルギー E を質量と運動量で表す式を用いて、量子的粒子のエネルギーが量子化されることを示せ。
4. $c\hbar$ と mc^2 を用いて、最低エネルギーの値を eV 単位で計算せよ。ただし、量子的粒子が電子として，$L = 1.0\text{Å},\ c\hbar \approx 2.0 \times 10^3\ \text{eV}\cdot\text{Å},\ mc^2 \approx 0.5 \times 10^6\ \text{eV},\ \pi^2 \approx 10$ とする。（ヒント：エネルギーの式の分母分子に c^2 を書けよ.）

(解答例)

1. 題意より，物質波の波長 λ の半分の整数倍が幅 L に等しい条件は次のようになる.
$$L = \frac{\lambda}{2} \times n.\ (n = 1, 2, \cdots) \tag{1}$$
2. 物質波の波長と量子的粒子の運動量 p についてのド・ブローイの関係は $\lambda = 2\pi\hbar/p$ である。
3. 題意より、量子的粒子のエネルギーの式に前問までの結果を代入すると
$$\begin{aligned} E &= \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2m}\left(\frac{2\pi\hbar}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{2m}\left(\pi\frac{\hbar n}{L}\right)^2 \\ \to E_n &\equiv \left(\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\right)n^2\ ,\ (n = 1, 2, \cdots). \end{aligned} \tag{2}$$
4. 題意より
$$\begin{aligned} E_{n=1} &= \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2} = \frac{\pi^2(c\hbar)^2}{2(mc^2)L^2} \\ &\approx \frac{10 \times (2.0 \times 10^3\ \text{eV}\cdot\text{Å})^2}{2 \times (0.5 \times 10^6\text{eV}) \times (1.0\text{A})^2} \\ \to E_{n=1} &\approx 40\ \text{eV}. \end{aligned} \tag{3}$$