

1 量子反射と量子トンネル効果

file:mae=quantum-tunneling150514C

トンネル効果は、 α 崩壊の理論 (G. ガモフ)、トンネルデバイス (Esaki diode)、電界をかけた金属からの熱電子放出、超伝導におけるジョセフソン効果、トンネル効果により低温でも起こる化学反応、トンネル効果により低温でも起こる核融合反応、走査型トンネル顕微鏡の原理トンネル効果による宇宙の「創成」(=一種の状態変化) (仮説) など多数の例に見られる。

1.1 階段型ポテンシャル障壁による量子反射

図1のような一次元の階段型ポテンシャル障壁 (エネルギー高 V_0) に左側から、エネルギー E の量子的粒子 (質量 m) が入射することを考える。

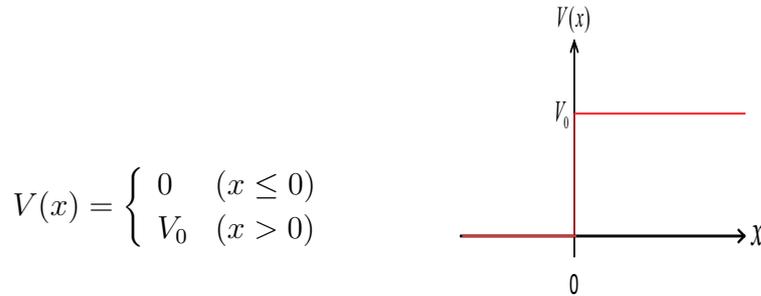


図 1: 階段型ポテンシャル

1.1.1 ポテンシャル障壁よりも低い入射エネルギー ($0 < E < V_0$) の場合

(a) 領域 I ($x \leq 0$), 領域 II ($x > 0$) ごとにシュレディンガー方程式を立て、波動関数の一般解を考える。

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi_I = E \psi_I. \quad (1.1)$$

$$\rightarrow \frac{d^2}{dx^2} \psi_I = -k^2 \psi_I, \quad k \equiv \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad (k: \text{波数}) \quad (1.2)$$

$$\psi_I(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}. \quad (1.3)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi_{II} + V_0 \psi_{II} = E \psi_{II} \quad (1.4)$$

$$\rightarrow \frac{d^2}{dx^2} \psi_{II} = \gamma^2 \psi_{II}, \quad \gamma \equiv \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}} \quad (1.5)$$

$$\psi_{II}(x) = C e^{-\gamma x} \quad (e^{\gamma x}: \text{不適}) \quad (1.6)$$

(ここで積分定数は一般には複素数であることに注意する。)

- (b) 波動関数についての境界条件より、特殊解の積分定数の比を求める。(未知数の個数より条件数が少ないので。)

$$\psi_I(0) = \psi_{II}(0) \rightarrow A + B = C \quad (1.7)$$

$$\psi'_I(0) = \psi'_{II}(0) \rightarrow ik(A - B) = -\gamma C \quad (1.8)$$

$$\frac{B}{A} = \frac{ik + \gamma}{ik - \gamma}, \quad \frac{C}{A} = \frac{2ik}{ik - \gamma}. \quad (1.9)$$

- (c) 入射波 (incident wave)、反射波 (reflective wave)、透過波 (transmitted wave) ごとに、確率の流れ密度 $J_x(\psi)$ を計算する。

$$\begin{aligned} J_{\text{inc}} &\equiv J_x(Ae^{ikx}) = \frac{\hbar}{2mi} [(Ae^{ikx})^* \frac{\partial}{\partial x} (Ae^{ikx}) - (Ae^{ikx}) \frac{\partial}{\partial x} (Ae^{ikx})^*] \\ &= \frac{\hbar k}{m} |A|^2. \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} J_{\text{ref}} &\equiv J_x(Be^{-ikx}) = \frac{\hbar}{2mi} [(Be^{-ikx})^* \frac{\partial}{\partial x} (Be^{-ikx}) - (Be^{-ikx}) \frac{\partial}{\partial x} (Be^{-ikx})^*] \\ &= -\frac{\hbar k}{m} |B|^2. \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} J_{\text{trans}} &= \frac{\hbar}{2mi} [(Ce^{-\gamma x})^* \frac{\partial}{\partial x} (Ce^{-\gamma x}) - (Ce^{-\gamma x}) \frac{\partial}{\partial x} (Ce^{-\gamma x})^*] = \\ &= \frac{\hbar}{2mi} [(C^* e^{-\gamma x}) C \cdot (-\gamma) e^{-\gamma x} - C e^{-\gamma x} C^* (-\gamma) e^{-\gamma x}] \\ &= \frac{\hbar}{2mi} |C|^2 \gamma (-e^{-2\gamma x} + e^{-2\gamma x}) = 0. \end{aligned} \quad (1.12)$$

- (d) 確率の流れ密度を用いて定義される反射率 R と透過率 T を計算する。

$$\begin{aligned} R &\equiv \frac{-J_{\text{ref}}}{J_{\text{inc}}} = \left| \frac{B}{A} \right|^2 = \frac{\gamma^2 + k^2}{(-\gamma)^2 + k^2} \\ &= 1, \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$T \equiv \frac{J_{\text{trans}}}{J_{\text{inc}}} = 0, \quad (1.14)$$

$$R + T = 1.0. \quad (1.15)$$

- (e) 以上の結果の意味を考えて見よう。反射率 $R = 1$ となり、全反射することになる。しかし、古典的粒子描像とは異なり、障壁内部の存在確率密度は $|\psi_{II}(x)| = |C|e^{-\gamma x}$ となり、部分的に浸透する確率がある。ポテンシャル障壁内部で量子的粒子の存在確率がゼロではないが、確率流れ密度はなく、 x 軸の負の方向から入った波は壁で全てはねかえされる。このような結果が得られるのは波が時間に無関係にずっと定常的に入ってくるからである [4]。

また、浸透距離の目安は $1/\gamma$ であり、 $1/\sqrt{V_0 - E}$ に比例する。したがって、ポテンシャル障壁が入射エネルギーに比べて充分高い、すなわち壁が”硬い”

と粒子が壁内に浸透する確率はゼロとなり、巨視的な世界における経験と矛盾しない。一方、入射エネルギーがポテンシャル障壁に近づけば、侵入の度合いは徐々に深くなっていく。これはポテンシャル障壁が有限の幅であれば、その障壁の向こう側に到達する可能性を示唆している。

1.1.2 ポテンシャル障壁よりも高い入射エネルギー ($E > V_0$) の場合

ポテンシャル障壁よりも低い入射エネルギー ($0 < E < V_0$) の場合と同様に計算する。

(a) シュレーディンガー方程式と一般解

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi_I = E \psi_I. \quad (1.16)$$

$$\rightarrow \frac{d^2}{dx^2} \psi_I = -k^2 \psi_I, \quad k \equiv \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad (k: \text{波数}) \quad (1.17)$$

$$\psi_I(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}. \quad (1.18)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi_{II} + V_0 \psi_{II} = E \psi_{II} \quad (1.19)$$

$$\rightarrow \frac{d^2}{dx^2} \psi_{II} = -k'^2 \psi_{II}, \quad k' \equiv \sqrt{\frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}} \quad (1.20)$$

$$\psi_{II}(x) = C e^{ik'x}. \quad (e^{-ik'x}: \text{後退波は不適。}) \quad (1.21)$$

(b) 境界条件より、未知係数の比を計算する。

$$\psi_I(0) = \psi_{II}(0) \rightarrow A + B = C \quad (1.22)$$

$$\psi'_I(0) = \psi'_{II}(0) \rightarrow ik(A - B) = ik'C \quad (1.23)$$

$$\frac{B}{A} = \frac{k - k'}{k + k'}, \quad \frac{C}{A} = \frac{2k}{k + k'}. \quad (1.24)$$

(c) それぞれの波動関数について、確率流れ密度を計算する。

$$\begin{aligned} J_{\text{inc}} &\equiv J_x(A e^{ikx}) \\ &= \frac{\hbar k}{m} |A|^2. \end{aligned} \quad (1.25)$$

$$\begin{aligned} J_{\text{ref}} &\equiv J_x(B e^{-ikx}) \\ &= -\frac{\hbar k}{m} |B|^2, \end{aligned} \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned} J_{\text{trans}} &\equiv J_x(C e^{ik'x}) = \frac{\hbar}{2mi} [(C e^{ik'x})^* \frac{\partial}{\partial x} (C e^{ik'x}) - (C e^{ik'x}) \frac{\partial}{\partial x} (C e^{ik'x})^*] \\ &= \frac{\hbar k'}{m} |C|^2. \end{aligned} \quad (1.27)$$

(d) 確率流れ密度を用いて、透過率 T と反射率 R を計算する。

$$\begin{aligned} R &\equiv \frac{-J_{ref}}{J_{inc}} = \left| \frac{B}{A} \right|^2 \\ &= \left(\frac{k - k'}{k + k'} \right)^2, \end{aligned} \quad (1.28)$$

$$\begin{aligned} T &\equiv \frac{J_{trans}}{J_{inc}} = \frac{k'}{k} \left| \frac{C}{A} \right|^2 \\ &= \frac{4kk'}{(k + k')^2}, \end{aligned} \quad (1.29)$$

$$\rightarrow R + T = 1.0. \quad (1.30)$$

(e) 以上の結果より、古典的粒子描像とは異なり、反射率 $R < 1$ 、すなわち部分的に反射する。対応して、透過率 $T < 1$ となり、透過率も 1.0 より減少する。

1.2 矩形ポテンシャル障壁における量子トンネル効果

図2で与えられる幅 d 、「高さ」 V_0 の矩形ポテンシャル障壁に左側から右側に入射する量子的粒子の運動を量子力学的に取り扱ふとどのようなことがおこるか考えてみよう。

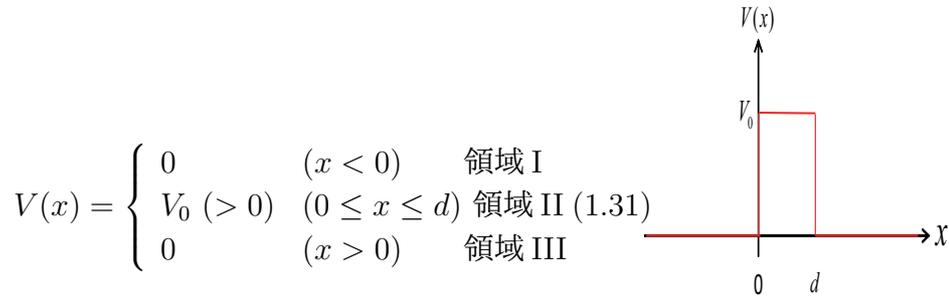


図 2: 矩形型ポテンシャル

1.2.1 入射エネルギーがポテンシャル障壁の高さより低い ($0 < E < V_0$) の場合

(a) 各領域ごとの定常状態の波動関数をそれぞれ $\psi_I(x)$, $\psi_{II}(x)$, $\psi_{III}(x)$ とすれば、シュレーディンガー方程式は次のようになる。

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi_I = E \psi_I. \quad (1.32)$$

$$\rightarrow \frac{d^2}{dx^2} \psi_I = -k^2 \psi_I, \quad k \equiv \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad (k : \text{波数}), \quad (1.33)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi_{II} + V_0 \psi_{II} = E \psi_{II} \quad (1.34)$$

$$\rightarrow \frac{d^2}{dx^2}\psi_{II} = \gamma^2\psi_{II}, \quad \gamma \equiv \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}, \quad (1.35)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2}\psi_{III} = E\psi_{III}. \quad (1.36)$$

$$\rightarrow \frac{d^2}{dx^2}\psi_{III} = -k^2\psi_{III}, \quad k \equiv \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad (k : \text{波数}) \quad (1.37)$$

設定された条件より、領域 I においては入射波と反射波の両方が可能であるが、領域 III においては進行波のみ可能である。さらに、領域 II においてはポテンシャル障壁内で有限に留まる解であればよい。これらのことを考慮すると、適当な積分定数 A, B, C, D, F を用いて一般解は次のように表すことができる。

$$\psi_I(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \quad (1.38)$$

$$\psi_{II}(x) = Ce^{\gamma x} + De^{-\gamma x}, \quad (1.39)$$

$$\psi_{III}(x) = Fe^{ikx}. \quad (1.40)$$

(ここで積分定数は一般には複素数であることに注意する。)

- (b) 領域間の境界において波動関数はなめらかに接続しなければならないので、次の諸関係を満たす必要がある。

$$\psi_I(0) = \psi_{II}(0) \rightarrow A + B = C + D, \quad (1.41)$$

$$\frac{d}{dx}\psi_I(0) = \frac{d}{dx}\psi_{II}(0) \rightarrow ik(A - B) = \gamma(C - D), \quad (1.42)$$

$$\psi_{II}(d) = \psi_{III}(d) \rightarrow Ce^{\gamma d} + De^{-\gamma d} = Fe^{ikd}, \quad (1.43)$$

$$\frac{d}{dx}\psi_{II}(d) = \frac{d}{dx}\psi_{III}(d) \rightarrow \gamma(Ce^{\gamma d} - De^{-\gamma d}) = ikFe^{ikd}. \quad (1.44)$$

ここで、決定すべき未知定数は5つで、条件式は4つであるから、すべてを決めることはできない。通常は入射波の強度 A に相対的な値 ($B/A, C/A, D/A, F/A$) を決める。式 (1.43) より

$$F = e^{-ikd}(e^{\gamma d}C + e^{-\gamma d}D). \quad (1.45)$$

ここで式 (1.44) を式 (1.43) で割って整理すると

$$D = \left(\frac{\gamma - ik}{\gamma + ik} \right) e^{2\gamma d} C. \quad (1.46)$$

式 (1.46) を式 (1.45) に代入すると

$$F = e^{-ikd} e^{\gamma d} \left(\frac{2\gamma}{\gamma + ik} \right) C \quad (1.47)$$

が得られる。式 (1.42) を

$$(A - B) = \frac{\gamma}{ik}(C - D) \quad (1.48)$$

と書き直す。式 (1.41) と式 (1.48) より、整理すると

$$C = \frac{2ik(\gamma + ik)A}{[(\gamma + ik)^2 - (\gamma - ik)^2 e^{2\gamma d}]}$$
 (1.49)

が得られる。この式 (1.49) を式 (1.47) に代入すると

$$\frac{F}{A} = \frac{4ik\gamma e^{-ikd}}{[(\gamma + ik)^2 e^{-\gamma d} - (\gamma - ik)^2 e^{\gamma d}]} \quad (1.50)$$

が得られる。次に、式 (1.41) と式 (1.42) との差を考えると

$$\begin{aligned} 2B &= C + D - \frac{\gamma}{ik}(C - D) = \left(1 - \frac{\gamma}{ik}\right)C + \left(1 + \frac{\gamma}{ik}\right)D \\ \rightarrow B &= \left(\frac{ik - \gamma}{2ik}\right)(1 - e^{2\gamma d})C. \end{aligned} \quad (1.51)$$

ここで、式 (1.46) を用いた。式 (1.49) と (1.51) より

$$\frac{B}{A} = \frac{(k^2 + \gamma^2)(e^{\gamma d} - e^{-\gamma d})}{[(\gamma + ik)^2 e^{-\gamma d} - (\gamma - ik)^2 e^{\gamma d}]} \quad (1.52)$$

(c) 入射波, 反射波, 透過波ごとに確率流れ密度 J_x を計算する。

$$J_{\text{inc}} \equiv J_x(Ae^{ikx}) = \frac{\hbar k}{m}|A|^2, \quad (1.53)$$

$$J_{\text{refl}} \equiv J_x(Be^{-ikx}) = -\frac{\hbar k}{m}|B|^2, \quad (1.54)$$

$$J_{\text{trans}} \equiv J_x(Fe^{ikx}) = \frac{\hbar k}{m}|F|^2. \quad (1.55)$$

以上の確率流れ密度を用いて、まず透過率 (貫通率) T を計算する。具体的な計算の便利さのため複数の表現を与える。

$$\begin{aligned} T &\equiv \frac{J_{\text{trans}}}{J_{\text{inc}}} = \frac{|F|^2}{|A|^2} = \frac{16\gamma^2 k^2}{(\gamma^2 + k^2)^2 [e^{2\gamma d} - 2 + e^{-2\gamma d}] + 16\gamma^2 k^2} \\ \rightarrow T &= \frac{1}{1 + \left(\frac{\gamma^2 + k^2}{2\gamma k}\right)^2 \sinh^2(\gamma d)} \end{aligned} \quad (1.56)$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \sinh^2\left(\sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}} \cdot d\right)} \neq 0. \quad (1.57)$$

ここで、式 (1.50) と $\sinh x \equiv (e^x - e^{-x})/2$ を用いた。古典力学においては、ポテンシャル障壁の透過は不可能であるが、量子力学においては $0 < E < V_0$ の

場合にも透過する確率がゼロではない。このことをトンネル効果 (tunneling effect) という。

反射率 R を次式で定義し、具体的な計算の便利さのために複数の表現を与える。

$$R \equiv \frac{-J_{\text{refl}}}{J_{\text{inc}}} = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \frac{(\gamma^2 + k^2)^2 [e^{2\gamma d} - 2 + e^{-2\gamma d}]}{(\gamma^2 + k^2)^2 [e^{2\gamma d} - 2 + e^{-2\gamma d}] + 16\gamma^2 k^2}$$

$$\rightarrow R = \frac{\left(\frac{\gamma^2 + k^2}{2\gamma k}\right)^2 \sinh^2(\gamma d)}{1 + \left(\frac{\gamma^2 + k^2}{2\gamma k}\right)^2 \sinh^2(\gamma d)} \quad (1.58)$$

$$= \frac{\frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \sinh^2\left(\sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}} \cdot d\right)}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \sinh^2\left(\sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}} \cdot d\right)}. \quad (1.59)$$

(d) 以上より

$$T + R = 1 \quad (1.60)$$

という関係が得られ、ポテンシャル障壁の境界において確率が保存されていることがわかる。

近似的な考察

1. ポテンシャル障壁が十分弱い場合： $\gamma d \ll 1$

$$\sinh^2 x = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4}$$

$$\approx x^2 \text{ for } x \ll 1. \quad (1.61)$$

透過率 T の式の分母の計算

$$\frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \sinh^2\left(\sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}} d\right) \approx \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \left(\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} d^2\right)$$

$$= \frac{mV_0^2 d^2}{2E\hbar^2}$$

$$\rightarrow T \approx \frac{1}{1 + \frac{mV_0^2 d^2}{2E\hbar^2}}. \quad (1.62)$$

2. ポテンシャル障壁が十分強い場合： $\gamma d \gg 1$

$$\sinh^2 x = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4}$$

$$\approx \frac{e^{2x}}{4} \gg 1 \text{ for } x \gg 1. \quad (1.63)$$

透過率 T の計算

$$\begin{aligned}
 T &\approx \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0-E)} \frac{e^{2\gamma d}}{4}} \approx \frac{16E(V_0-E)}{V_0^2} e^{-2\gamma d} \\
 &\approx \frac{16k^2\gamma^2}{(k^2 + \gamma^2)^2} \cdot e^{-2\gamma d} \quad (1.64)
 \end{aligned}$$

最終の式の第一因子は $x = 0$ における反射の効果を表し、第二因子はポテンシャル障壁内での波動関数の減衰を表す。ここで、透過率 T の値は障壁の厚さ d と”波数” γ に非常に敏感であることを注意する。透過率のこの性質を利用した装置として走査型トンネル顕微鏡がある。走査型トンネル顕微鏡の先端の針が物質表面の状態に敏感に対応したトンネル電流の強弱を生じるのである。

さらに、 $\gamma^2 d$ は入射エネルギーより上のポテンシャル障壁の (ある意味での)”面積” に比例していることは次のように理解できるであろう。すなわち、入射エネルギーが大きいほど”面積” が小さくなり、透過しやすくなる。逆に、入射エネルギーが小さいほど”面積” が大きくなり、透過しにくくなる。また、 γ は質量の平方に比例しているため、軽い粒子ほど透過しやすくなる。

各領域における存在確率密度の計算

1. 領域 I:

$$\begin{aligned}
 |\psi_I|^2 &= (Ae^{ikx} + Be^{-ikx})(A^*e^{-ikx} + B^*e^{ikx}) \\
 &= |A|^2 + |B|^2 + A^*Be^{-2ikx} + AB^*e^{2ikx} \\
 &= |A|^2 \left[1 + \left| \frac{B}{A} \right|^2 + \left(\frac{B}{A} + \frac{B^*}{A^*} \right) \cos(2kx) + i \left(\frac{B}{A} - \frac{B^*}{A^*} \right) \sin(2kx) \right] \quad (1.65)
 \end{aligned}$$

領域 I において、存在確率密度の空間的变化は一定の値の上に三角関数型の周期的変動が加わっていることがわかる。

2. 領域 II:

$$\begin{aligned}
 |\psi_{II}|^2 &= (Ce^{\gamma x} + De^{-\gamma x})(C^*e^{\gamma x} + D^*e^{-\gamma x}) \\
 &= |C|^2 e^{2\gamma x} + |D|^2 e^{-2\gamma x} + C^*D + CD^* \quad (1.66)
 \end{aligned}$$

領域 II における存在確率密度の位置変化は指数関数的減衰と指数関数的増加の重ね合わせである。

3. 領域 III

$$|\psi_{III}|^2 = |Fe^{ikx}|^2 = |F|^2 \quad (1.67)$$

領域 III における存在確率密度は一定値となる。

1.2.2 入射エネルギーがポテンシャル障壁の高さより高い ($E > V_0$) の場合

この場合、領域 I、III においては $0 < E < V_0$ の場合と同じであるが、領域 II におけるシュレーディンガー方程式は

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_0\right] \psi_{II} = E \psi_{II}. \quad (1.68)$$

$$\rightarrow \frac{d^2}{dx^2} \psi_{II} = -(k')^2 \psi_{II}, \quad k' \equiv \sqrt{\frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}} \quad (k' : \text{波数}) \quad (1.69)$$

となる。この結果は、 $0 < E < V_0$ の場合の領域 II における波数 (に相当する量) γ を次のように置き換えれば、 $E \geq V_0$ の場合にも同じように議論できることを意味する。

$$\gamma \rightarrow -ik', \quad [\sinh(-ik') = -i \sin k']. \quad (1.70)$$

透過率 T は

$$T = \frac{1}{1 + \left(\frac{k^2 - (k')^2}{2kk'}\right)^2 \sin^2(k'd)} = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(E - V_0)} \sin^2\left(\sqrt{\frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}} d\right)} \neq 0 \quad (1.71)$$

となる。また、反射率 R は

$$R = \frac{\left(\frac{k^2}{-2ikk'}\right)^2 (-) \sin^2(k'd)}{1 + \left(\frac{k^2 - (k')^2}{-2ikk'}\right)^2 (-) \sin^2(k'd)} = \frac{\frac{V_0^2}{4E(E - V_0)} \sin^2\left(\sqrt{\frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}} d\right)}{1 + \frac{V_0^2}{4E(E - V_0)} \sin^2\left(\sqrt{\frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}} d\right)} \quad (1.72)$$

と表される。以上より、再び

$$T + R = 1 \quad (1.73)$$

という関係が得られ、ポテンシャル障壁の境界において確率が保存されていることがわかる。

さらに、式 (1.71) の \sin 関数の性質より、 $\sqrt{2m(E - V_0)}/\hbar^2 \cdot d = n\pi$, ($n = 1, 2, \dots$) のとき、すなわち

$$E = E_n \equiv V_0 + \left(\frac{\pi^2 \hbar^2}{2md^2}\right) n^2, \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (1.74)$$

の場合、透過率 T が極大値 $T = 1$ を取るという周期性があることに注意する。この場合、対応して、反射率 R はゼロになる。この性質を共鳴透過という。

1.2.3 透過確率のエネルギー依存性

以上の結果を踏まえて、透過確率のエネルギー依存性を具体的に見てみよう。そのため、二つのエネルギー領域の境界である $E \rightarrow V_0$ の極限において、透過率 (1.56) と (1.71) の値はともに同じ値

$$T = \frac{1}{1 + \frac{md^2 V_0}{2\hbar^2}} \quad (1.75)$$

になる。これは、 $0 < E < V_0$ の領域においては、 $\sqrt{2m(V_0 - E)/\hbar^2} \cdot d \equiv x$ とおき、変数を変換し、 $x \rightarrow 0$ の極限において $\sinh(x)/x \rightarrow 1$ となることなどから確認できる。もちろん、 md^2V_0/\hbar^2 は無次元の量である。

グラフを描くためには、文字式に具体的数値を代入しなければならない。その前に、光速 c を用いて次のような書き直しを行う。

$$\sqrt{\frac{2md^2(V_0 - E)}{\hbar^2}} = \sqrt{1 - \frac{E}{V_0}} \sqrt{\frac{2mc^2 \cdot d^2V_0}{(c\hbar)^2}}. \quad (1.76)$$

今、 $mc^2 \approx 0.5 \times 10^6$ eV (電子を想定)、 $d = 1 \text{ \AA}$ 、 $V_0 = 30$ eV とし、 $c\hbar \approx 1973 \text{ \AA eV}$ を用いると

$$\sqrt{\frac{2md^2(V_0 - E)}{\hbar^2}} \approx 5.44 \sqrt{1 - \frac{E}{V_0}} \quad (1.77)$$

となる。あらためて $E/V_0 \equiv x$ と変数変換し、まとめると

$$T \approx \frac{1}{1 + \frac{1}{4x(1-x)} \sinh^2(5.44 \sqrt{1-x})} \quad (0 \leq x < 1), \quad (1.78)$$

$$T \approx \frac{1}{1 + \frac{1}{4x(x-1)} \sin^2(5.44 \sqrt{x-1})} \quad (1 < x). \quad (1.79)$$

となる。これらの関数のグラフを図3に示す。

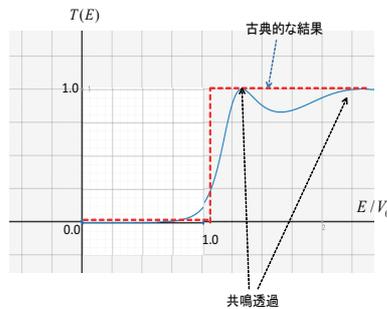


図 3: 矩形型ポテンシャルにおける透過率のエネルギー依存性

参考文献

- [1] 佐川弘幸、清水克太郎、「量子力学」、シュプリンガーフェアラーク東京、1998年。
- [2] 岩波講座 (現代物理学) , 「量子力学 I(第2版)」 , (1978年) . 特に、2章。

- [3] 清水 明、「量子論の基礎—その本質のやさしい理解のために—」、サイエンス社、2003年。3章。
- [4] 笹川辰弥、「散乱理論」、裳華房、1991年、5ページ。