(スピン行列の性質)spin1-QA20150623.tex

スピン演算子の行列表現は以下のように与えられる：

$$\hat{s}_x = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\hbar}{2} \\ \frac{\hbar}{2} & 0 \end{bmatrix},\ \hat{s}_y = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i}\frac{\hbar}{2} \\ \mathrm{i}\frac{\hbar}{2} & 0 \end{bmatrix},\ \hat{s}_z = \begin{bmatrix} \frac{\hbar}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar}{2} \end{bmatrix}. \tag{1}$$

1. 次の交換関係が成立することを示せ。

$$[\hat{s}_x, \hat{s}_y] = \mathrm{i}\hbar\hat{s}_z,\ [\hat{s}_y, \hat{s}_z] = \mathrm{i}\hbar\hat{s}_x,\ [\hat{s}_z, \hat{s}_x] = \mathrm{i}\hbar\hat{s}_y. \tag{2}$$

2. スピン行列の 2 乗を $\hat{\vec{s}}^2 \equiv \hat{s}_x^2 + \hat{s}_y^2 + \hat{s}_z^2$ と定義し、次のように表したとき、s の値はどうなるかを求めよ。

$$\hat{\vec{s}}^2 = s(s+1)\hbar^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

(解答例)

1. (a) 題意より

$$\begin{aligned} [\hat{s}_x, \hat{s}_y] &= \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right), \\ &= \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \left(\begin{bmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & \mathrm{i} \end{bmatrix} \right) = \frac{\hbar^2\mathrm{i}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \mathrm{i}\hbar\hat{s}_z. \end{aligned} \tag{4}$$

(b) 同様に

$$\begin{aligned} [\hat{s}_y, \hat{s}_z] &= \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \left(\begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} \right), \\ &= \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \left(\begin{bmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} \right) = \frac{\hbar^2\mathrm{i}}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \mathrm{i}\hbar\hat{s}_x. \end{aligned} \tag{5}$$

(c) 同様に

$$\begin{aligned} [\hat{s}_z, \hat{s}_x] &= \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right), \\ &= \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = \frac{\hbar^2\mathrm{i}}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \mathrm{i}\hbar\hat{s}_y. \end{aligned} \tag{6}$$

2.

$$\hat{\vec{s}}^2 = \frac{\hbar^2}{4} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{3\hbar^2}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
\rightarrow s(s+1) &= \frac{3}{4} \rightarrow \left(s - \frac{1}{2}\right)\left(s + \frac{3}{2}\right) = 0 \ (s > 0) \\
\rightarrow s &= \frac{1}{2}.
\end{aligned} \tag{7}
$$