階段型障 2 :steppot2-qa110127.tex

次のような一次元の階段型ポテンシャル障壁に左側から、エネルギー $E$ の量子的粒子（質量 $m$）が進入する。エネルギー $E$ がその障壁 $V_0$ よりも高い（$E > V_0$）の場合, 以下の問に答えよ。ただし、プランク定数を $h$, ディラック定数を $\hbar \equiv \frac{h}{2\pi}$ とする。

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ V_0 & (x > 0) \end{cases}$$

1. 領域 I（$x \leq 0$）, 領域 II($x > 0$) ごとにシュレディンガー方程式とその一般解を記せ。
2. 波動関数についての境界条件より、特殊解の積分定数の比を求めよ。
3. 入射波に対する確率流れ密度 $J_{\rm inc}$、反射波に対する確率流れ密度 $J_{\rm ref}$、透過波に対する確率流れ密度 $J_{\rm trans}$ を計算せよ。ただし、波動関数（またはその部分）$\psi_a$ に対する確率流れ密度（の $x$ 成分）$J_x(\psi_a)$ は次のように定義される：

$$J_x(\psi_a) \equiv \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi_a^* \frac{\partial \psi_a}{\partial x} - \frac{\partial \psi_a^*}{\partial x}\psi_a\right), \ (i : 純虚数) \tag{1}$$

4. 反射率 $R \equiv -J_{ref}/J_{inc}$, 透過率 $T \equiv J_{trans}/J_{inc}$ および $R + T$ を計算せよ。
5. $E > V_0$ の場合には、古典的粒子は領域 I($x \leq 0$) には反射されないはずであるが、量子的粒子はどうか述べよ。

（解答例）

1. シュレディンガー方程式と一般解

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi_I = E\psi_I. \tag{2}$$

$$\to \frac{d^2}{dx^2}\psi_I = -k^2\psi_I \tag{3}$$

$$k \equiv \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad (k: 波数) \tag{4}$$

$$\psi_I(x) = A\mathrm{e}^{ikx} + B\mathrm{e}^{-ikx}. \tag{5}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi_{II} + V_0\psi_{II} = E\psi_{II} \tag{6}$$

$$\to \frac{d^2}{dx^2}\psi_{II} = -k'^2\psi_{II} \tag{7}$$

$$k' \equiv \sqrt{\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}} \tag{8}$$

$$\psi_{II}(x) = C\mathrm{e}^{ik'x} (\mathrm{e}^{-ik'x}: 後退波) \tag{9}$$

2. 境界条件より

$$\psi_I(0) = \psi_{II}(0) \tag{10}$$

$$\to A + B = C \tag{11}$$

$$\psi'_I(0) = \psi'_{II}(0) \tag{12}$$

$$\to ik(A - B) = ik'C \tag{13}$$

$$\frac{B}{A} = \frac{k-k'}{k+k'}, \frac{C}{A} = \frac{2k}{k+k'} \tag{14}$$

$$\tag{15}$$

3. 確率の流れ密度 (inc 入射,ref 反射,trans 透過)

$$J_{inc} = \frac{\hbar}{2mi}[(A\mathrm{e}^{ikx})^* \frac{\partial}{\partial x}(A\mathrm{e}^{ikx}) - (A\mathrm{e}^{ikx})\frac{\partial}{\partial x}(A\mathrm{e}^{ikx})^*] \tag{16}$$

$$= \frac{\hbar k}{m}|A|^2. \tag{17}$$

$$J_{ref} = \frac{\hbar}{2mi}[(B\mathrm{e}^{-ikx})^* \frac{\partial}{\partial x}(B\mathrm{e}^{-ikx}) - (B\mathrm{e}^{-ikx})\frac{\partial}{\partial x}(B\mathrm{e}^{-ikx})^*] \tag{18}$$

$$= -\frac{\hbar k}{m}|B|^2. \tag{19}$$

4.

$$R \equiv \frac{-J_{ref}}{J_{inc}} = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \left(\frac{k-k'}{k+k'}\right)^2 \quad (20)$$

$$J_{trans} = \frac{\hbar}{2mi}[(C\mathrm{e}^{ik'x})^* \frac{\partial}{\partial x}(C\mathrm{e}^{ik'x}) - (C\mathrm{e}^{ik'x})\frac{\partial}{\partial x}(C\mathrm{e}^{ik'x})^*] \quad (21)$$

$$= \frac{\hbar k'}{m}|C|^2. \quad (22)$$

$$T \equiv \frac{J_{trans}}{J_{inc}} = \frac{k'}{k}\frac{|C|^2}{|A|^2} = \frac{4kk'}{(k+k')^2}. \quad (23)$$

$$R + T = 1.0. \quad (24)$$

5. 前問の結果より、反射率 $R < 1$ となり、古典的粒子とは異なり、量子的粒子はそのエネルギーよりも低いポテンシャル障壁の存在に対応して部分的に反射する。関連して、透過率 $T < 1$ となり、透過率も 1.0 より減少する。