

(トンネル効果 tunneling-1A-qa20160525.tex)

トンネル効果において、高さ V_0 、幅 d のポテンシャル障壁にエネルギー $E (< V_0)$ の電子 (質量 m) が入射する場合の透過係数 T は次式で与えられる。

$$T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \sinh^2(\gamma d)}, \quad k \equiv \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}, \quad \gamma \equiv \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}. \quad (1)$$

高さ $V_0 = 30\text{eV}$ 、幅 $d = 10\text{\AA} = 10^{-9}\text{m}$ 、エネルギー $E = 10\text{eV}$ の場合に T の値を次の手順で計算せよ。(有効数字は2桁とする。) ただし、光速 c として、 $mc^2 = 0.51099906 \times 10^6 \text{ eV}$ 、ディラック定数 \hbar として、 $c\hbar = 1973.27053 \text{ eV} \cdot \text{\AA}$ ($1\text{\AA} \equiv 10^{-10} \text{ m}$) を用いてよい。

1. ド・ブローイ波長 $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ を計算し、その大きさがポテンシャル障壁の厚さの何倍かを述べよ。(ヒント：根号の中で、分母と分子のそれぞれに c の2乗をかけて、 mc^2 , $c\hbar$ の与えられた値を用いよ。)
2. γd を計算せよ。(ヒント：前問と同じ。)
3. T を計算せよ。(ヒント：根号の中の分数因子 $V_0^2/E(V_0 - E)$ は無次元であること。)

(解答例)

1. 題意より

$$\begin{aligned} k &= \sqrt{\frac{2(mc^2)E}{(c\hbar)^2}} = \sqrt{\frac{2 \times 0.51099906 \times 10^6 \text{ eV} \times 10 \text{ eV}}{(1973.27053 \text{ eV} \cdot \text{\AA})^2}} \\ &= \sqrt{\left(\frac{2 \times 0.51099906}{(1.97327053)^2}\right) \times 10^{6+1-6} \times \left(\frac{1}{\text{\AA}^2}\right)}, \\ &= 1.62008730 \text{ \AA}^{-1}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{2\pi}{k} = \frac{2 \times 3.1415926}{1.62008730 \text{ \AA}} \approx 3.88 \text{ \AA} \\ &= 0.388 d \text{ (0.388 倍)} \end{aligned} \quad (3)$$

2. 題意より

$$\begin{aligned} \gamma d &= \sqrt{\frac{2(mc^2)(V_0 - E)}{(c\hbar)^2}} \times d \\ &= \sqrt{\frac{2 \times (0.51099906 \times 10^6 \text{ eV}) \times 20 \text{ eV}}{(1973.27053 \text{ eV} \cdot \text{\AA})^2}} \times 10\text{\AA} \\ &= \sqrt{\left(\frac{2 \times 0.51099906 \times 20}{(1.97327053)^2}\right) \times 10^{6-6} \times 10}, \\ &= 22.911494 \approx 23.0. \end{aligned} \quad (4)$$

3. 題意より

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{1 + \frac{(30)^2}{4 \times 10 \times (30-10)} \sinh^2(\gamma d)} \\ &\approx \frac{8}{9} \left(\frac{2}{e^{23}} \right)^2 \approx 3.74 \times 10^{-20}. \end{aligned} \quad (5)$$

(このように、 γd の値が大きい場合には透過係数は著しく小さくなる。)