(トンネル効果における透過率の近似的表現 tunneling-approximation-QA20190524A.tex)

量子トンネル効果において、高さ V_0, 幅 d のポテンシャル障壁にエネルギー $E(0<E<V_0)$ の量子的粒子 (質量 m) が入射する場合の透過率 T は次式で与えられる。

$$T=\frac{1}{1+\frac{V_0^2}{4E(V_0-E)}\sinh^2(\gamma d)},\ \ k\equiv\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}},\ \gamma\equiv\sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}. \tag{1}$$

ただし，ディラック定数を $\hbar$ として，$\sinh x\equiv(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x})/2$ である．

1. 量子的粒子のエネルギ-E がポテンシャル障壁の高さ V_0 より小さく，かつ

$$d\sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}\gg 1 \tag{2}$$

が成り立つ場合，透過率 T の近似的表現を求めよ．

2. 量子的粒子が電子 ($m=0.911\times10^{-30}$ kg) であり，$d=1.0\times10^{-9}$ m, $E=7$ eV, $V_0=10$ eV の場合，透過率の厳密な値と近似的な値を計算して，桁数が一致するかどうか比較せよ．ただし，光速 c として, $mc^2=0.511\times10^6$ eV, $c\hbar=1.97\times10^3$ eV $\cdot$ Å(1Å $\equiv10^{-10}$ m) を用いよ。

（解答例）

1. 題意より

$$\sinh^2 x \;=\; \left(\frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2=\frac{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x}-2}{4}\approx\frac{\mathrm{e}^{2x}}{4}\gg 1 \text{ for } x\gg 1 \tag{3}$$

となり，透過率 T の近似的表現式 T_{approx} は

$$T_{\mathrm{approx}} \;\approx\; \frac{1}{1+\frac{V_0^2}{4E(V_0-E)}\frac{\mathrm{e}^{2\gamma d}}{4}}\approx\frac{16E(V_0-E)}{V_0^2}\mathrm{e}^{-2\gamma d} \tag{4}$$

となる．さらに，概算値としては $\mathrm{e}^{-2\gamma d}$ でもよい．

2. まず γ の定義式の分母と分子に光速 c の 2 乗をかけて，与えられた定数値を代入して，その値を計算する．

$$\begin{aligned}\gamma &= \sqrt{\frac{2mc^2(V_0-E)}{(\hbar c)^2}}\\ &= \sqrt{\frac{2\times(0.511\times10^6\ \mathrm{eV})\times(10-7)\ \mathrm{eV}}{(1.97\times10^3\ \mathrm{eV}\cdot\mathrm{\AA})^2}}\\ &= \sqrt{\frac{2\times0.511\times3\times10^6}{(1.97)^2\times10^6}}\cdot\frac{1}{\mathrm{\AA}}\\ &= \frac{0.889}{\mathrm{\AA}}\end{aligned} \tag{5}$$

となり，$\gamma d = 8.89$ が得られる．

透過率の正確な式 T_{exact}，透過率の近似式 $T_{\mathrm{approx-1}}$，透過率の式の指数関数だけの近似式 $T_{\mathrm{approx-2}}$ の値はそれぞれ以下のようになる．

$$\begin{aligned} T_{\mathrm{exact}} &= 6.25 \times 10^{-8}, \\ T_{\mathrm{approx-1}} &= 6.38 \times 10^{-8}, \\ T_{\mathrm{approx-2}} &= 1.9 \times 10^{-8}. \end{aligned} \tag{6}$$

指数関数だけの粗い近似でも，因子は 3 倍くらい異なるが，桁数は一致しているので，概算評価としては妥当である考えられる．