不確定性関係の水素原子への適用:uncertainty-hydrogen-qa20210226a.tex

　不確定性関係を水素原子に適用して基底状態の平均半径を次の手順で推定せよ。ここで電子の質量を m 、電荷を $-e$、真空の誘電率 ε_0, ディラック定数 $\hbar$ （＝プランク定数 $h/2\pi$) を用いてよい。位置の不確定性 Δx, 運動量の不確定性 Δp_x とすれば、不確定性関係は $\Delta x \Delta p_x \approx \hbar$ と近似的に表現されるとする。

1. 電子が半径 r の領域に閉じ込められるとすると、電子の運動量の大きさはどうなるか。
2. 電子の力学的エネルギー E を $m, e, \varepsilon_0, \hbar, r$ で表す式を求め、E の r 依存性 (グラフ）の概略を図示よ。
3. E を半径 r の関数と考えて，その極小値を与える半径 (の式）を求めよ。
4. 前問の結果式を，まず $1/(4\pi\varepsilon_0), e, c\hbar, mc^2$ 用いて書き直して，次に，微細構造定数 $\alpha \equiv \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{c\hbar}{mc^2}$ と普遍定数 $c\hbar \simeq 2000\mathrm{eV}\cdot\text{Å}$, $mc^2 \simeq 0.5\mathrm{MeV} = 0.5\times 10^6\mathrm{eV}$, $e \simeq 1.6\times 10^{-19}\mathrm{C}$, $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \simeq 9\times 10^9\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{C}^2$ を用いて，水素原子の半径 (単位 Å）を有効数字 2 桁程度で計算せよ.
5. 水素原子に対して，不確定性関係はどのような役割を果たしていると言えるか，述べよ.

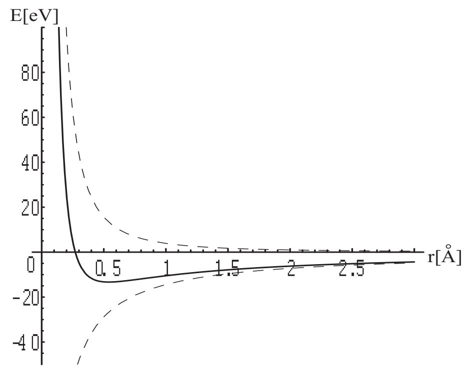
(解答例)

1. 題意より $r \cdot p \approx \hbar \to p \approx \frac{\hbar}{r}$
2. 今の場合、電気力は引力であり、ポテンシャルエネルギーにマイナス符号がつくことに注意すると、力学的エネルギーは

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad (1)$$

$$= \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}. \quad (2)$$

と表される。



3. 半径の関数としての力学的エネルギーの極値条件より式 (**??**) より

$$0 = \frac{dE}{dr}$$

$$= -\frac{\hbar^2}{mr^3} + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$r = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2}. \quad (3)$$

このように，水素原子がつぶれずに、安定であるために不確定性関係は重要な役割を果たしている。

4. 題意より

$$\begin{aligned}
\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2} &= (\frac{4\pi\varepsilon_0}{e^2}) \times \frac{(c\hbar)^2}{mc^2} \\
&= \frac{1}{\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\cdot\frac{e^2}{c\hbar}} \times \frac{c\hbar}{mc^2} \\
&= \frac{1}{\alpha} \times \frac{c\hbar}{mc^2} \\
&= 137 \times \frac{2000\mathrm{eV}\cdot\text{Å}}{0.5\times 10^6\mathrm{eV}} \\
&\approx 0.55\text{Å}. \qquad (4)
\end{aligned}$$

5. 以上の結果より、不確定性関係は水素原子がつぶれずに、安定であるために重要な役割を果たしている．