[内部エネルギー変化]internalenergy-qa100115.tex

理想気体の１モルの（圧力、体積）が (P_1, V_1) から (P_2, V_2) へ変化する場合、この気体の内部エネルギー変化 ΔU が

$$\Delta U = \frac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{\gamma - 1} \tag{1}$$

と表わされることを示せ。ただし、$\gamma (> 1)$ は気体の比熱比であり、定圧モル比熱 C_p、定積モル比熱 C_v により $\gamma \equiv C_p / C_v$ と定義される。

(解答例)

１モルの理想気体は状態方程式

$$PV = RT \ (R : \text{気体定数}) \tag{2}$$

を満たす。理想気体の内部エネルギーは絶対温度だけの関数で、１モルの場合、定積モル比熱 C_v により

$$U = C_v T + \mathrm{constant} \tag{3}$$

と表される。さらに、理想気体の定圧モル比熱 C_p、定積モル比熱 C_v は次の性質（マイヤーの関係式) を満たす。

$$C_p - C_v = R. \tag{4}$$

式（3）の両辺において温度変化 ΔT に対応する有限の変化を考えると

$$\Delta U = C_v \Delta T \tag{5}$$

となる。題意より、初めと終わりの状態における温度を T_1, T_2 として、式 (2) を用いると

$$P_1 V_1 = RT_1, \tag{6}$$
$$P_2 V_2 = RT_2 \tag{7}$$

となる。ここで、$\Delta T \equiv T_2 - T_1$ とおくことができる。この関係と式（4）を式（5）に代入すると

$$\begin{aligned} \Delta U &= C_v \frac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{R} \\ &= \left(\frac{C_v}{C_p - C_v}\right)(P_2 V_2 - P_1 V_1) \\ &= \frac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{\gamma - 1}. \end{aligned} \tag{8}$$

よって、問題の関係式は証明された。