(平面運動における角運動量と力のモーメント）anguler-mom-3-QA20151201.tex

xy 面上の平面運動を考える。任意の時刻において、質点 (粒子) の位置ベクトル $\vec{r}=(x,y,0)$、運動量ベクトル $\vec{p}=(p_x,p_y,0)$、力のベクトル $\vec{F}=(F_x,F_y,0)$ と書ける。以下の問いに答よ。

1. 角運動量 $\vec{\ell}$ の x,y,z 成分 ℓ_x,ℓ_y,ℓ_z を計算せよ。
2. 力のモーメント (トルク)$\vec{N}$ の x,y,z 成分 N_x,N_y,N_z を計算せよ。
3. 力のベクトル $\vec{F}$ がゼロではなくても、 力のモーメント (トルク) ベクトル $\vec{N}$ がゼロになる場合があるか、どうか調べよ。
4. 力のモーメント (トルク)$\vec{N}$ がゼロになる場合，角運動量 $\vec{\ell}$ はどうなるか.

(解答) 二つの任意のベクトル $\vec{A}=(A_x,A_y,A_z)$, $\vec{B}=(B_x,B_y,B_z)$ に対して、ベクトル積 (外積) は次のように定義される

$$\vec{A}\times\vec{B} \equiv (A_yB_z-A_zB_y, A_zB_x-A_xB_z, A_xB_y-A_yB_x) \quad (1)$$

$\vec{A}\times\vec{B}$ は $\vec{A}$ から $\vec{B}$ に向けて右ねじをまわしたときに，ねじの進む向きである。

1. 定義より

$$\begin{aligned} \vec{\ell} &\equiv \vec{r}\times\vec{p} \\ \rightarrow \ell_x &= y\times 0-0\times p_y=0, \\ \ell_y &= 0\times p_x - x\times 0 = 0, \\ \ell_z &= xp_y-yp_x. \end{aligned} \quad (2)$$

これは xy 面上の二つのベクトルを回すと、 z 軸向きのベクトルをつくるに対応している。

2. 同様に、力のモーメントベクトル $\vec{N}$ の定義より

$$\begin{aligned} \vec{N} &\equiv \vec{r}\times\vec{F} \\ \rightarrow N_x &= 0, \\ N_y &= 0\times F_x - x\times 0 = 0, \\ N_z &= xF_y-yF_x. \end{aligned} \quad (3)$$

xy 面上の二つのベクトルを回すと、 z 軸向きのベクトルをつくるに対応している。

3. 前問の結果より、力のモーメントベクトル $\vec{N}$ の z 成分は一般にはゼロではない。しかし、$xF_y-yF_x=0$ となることもあり、それは

$$\frac{F_y}{F_x} = \frac{y}{x} \quad (4)$$

となる力、すなわち、$\vec{F}$ が $\vec{r}$ に比例している力である。
（備考：このような性質をもつ力を中心力といい、重力や電気力などの例がある。）
この問題のように、平面運動においては、その面に垂直な向きに角運動量、力のモーメントがともに生じる、すなわち、回転運動が生じる。しかし、中心力の場合にはたとえ力が働いてもそのモーメントはゼロになることを意味している。）

4. $\vec{\ell}$ と $\vec{N}$ の間には任意の時刻 t において，次の関係式 (回転の運動方程式）が成り立つ．

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{N}. \tag{5}$$

したがって，$\vec{N}$ がゼロになる場合，角運動量 $\vec{\ell}$ はベクトルとして保存される．すなわち，角運動量 $\vec{\ell}$ ベクトルの向きも大きさも一定であり，物体の軌道は $\vec{\ell}$ の向きに垂直な平面上に限られる．