

電荷、クーロンの法則、電場、電位とガウスの法則

- § 1. 電磁気学の確立までの歴史
- § 2. 電荷とその素量性、離散性、保存則
- § 3. 電気力とクーロンの法則
- § 4. 電場の概念とその実例・応用
- § 5. 電位
- § 6. 静電場についてのガウスの法則
- § 7. 導体の性質とその応用

Made by R. Okamoto (emeritus prof., Kyushu Inst. of Tech.)

Filename=charge-coulomb-law-electric-field-Gauss-law20150705A.ppt

§ 1.電磁気学の確立までの歴史

古代ギリシャの原子論：物質の不変、不滅の構成要素(実在)としての原子と
その運動の舞台としての真空の存在

17世紀：ニュートン力学

不変、不滅の物体(粒子)が空虚な空間を運動する。

力(相互作用)は直接に瞬時に伝わる。

→アキレス腱は光の性質の説明ができないこと

19世紀：電磁気学(マックスウエル方程式)

光は電磁波である。

周囲の物理空間(電場、磁場など場)を通じて電氣的相互作用が
有限の速度でつたわる。

ニュートンの(運動方程式+重力)+マックスウエル方程式=古典物理学のすべて

粒子(原子)と場の2元論にとどまる

ニュートン力学：基礎、思想と応用

ニュートン力学(17世紀)――

時間と空間は相互に独立である。

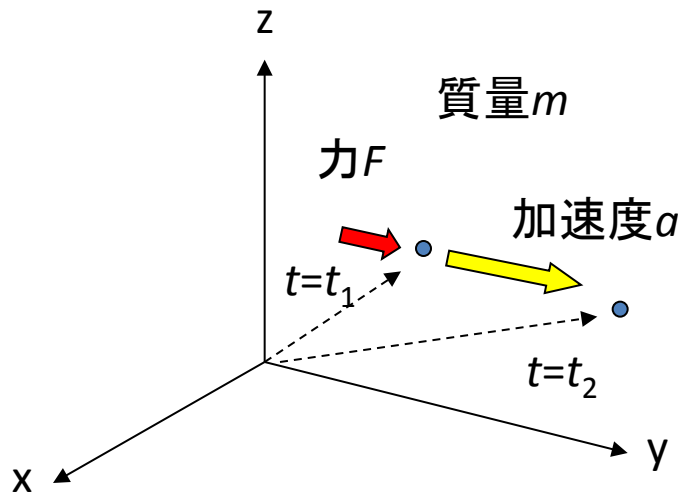
物体(粒子)の運動と時間・空間は独立である。

粒子の情報はある時刻におけるその位置と運動量(速度)である。

「万有引力(重力)は瞬時に(＝無限大の速度で)伝わる」とニュートンは考えた。

粒子が主役で、時間や空間は等質無限の媒介変数や舞台(または容器)

(現代から見ると、速度が光速よりもずっと遅く、原子分子よりも小さな構造を見ない範囲で自然界を記述する近似的理論)



$$\vec{m}\vec{a} = \vec{F}$$

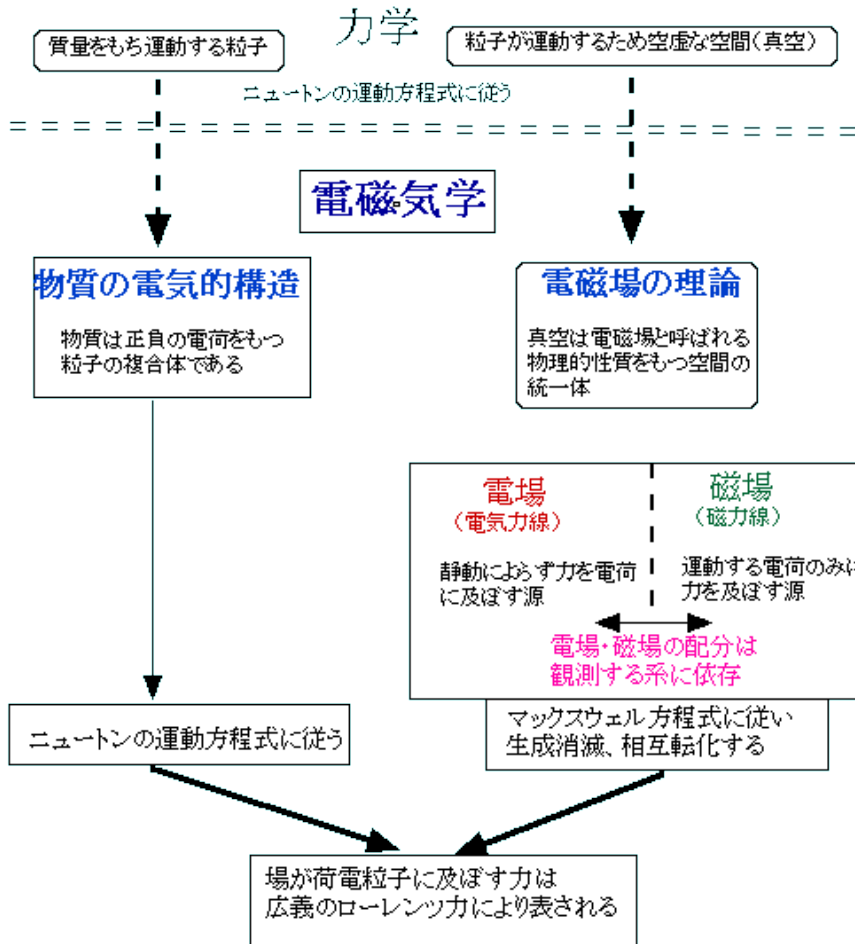
$$\Leftrightarrow (ma_x = F_x, ma_y = F_y, ma_z = F_z)$$

→その現代的な応用:

スペースシャトル、弾道ミサイル他

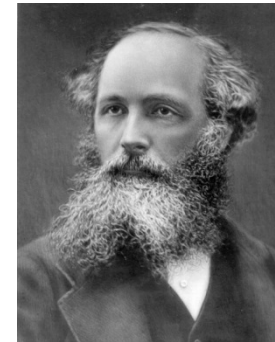
→現代まで引きずるニュートンの遺産(「粒子」概念＝質量をもつ幾何学的延長、空間的局在性)

電磁気学の構造



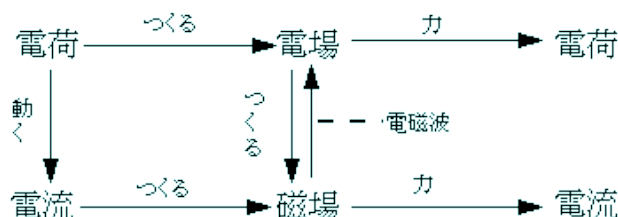
マイケル・ファラデー (Michael Faraday, 1791年- 1867年) イギリスの化学者・物理学者で、電磁気学および電気化学の分野での貢献。電磁場の概念の創出。

<http://krisscience.blogspot.jp/2012/04/biography-and-profile-of-michael.html>

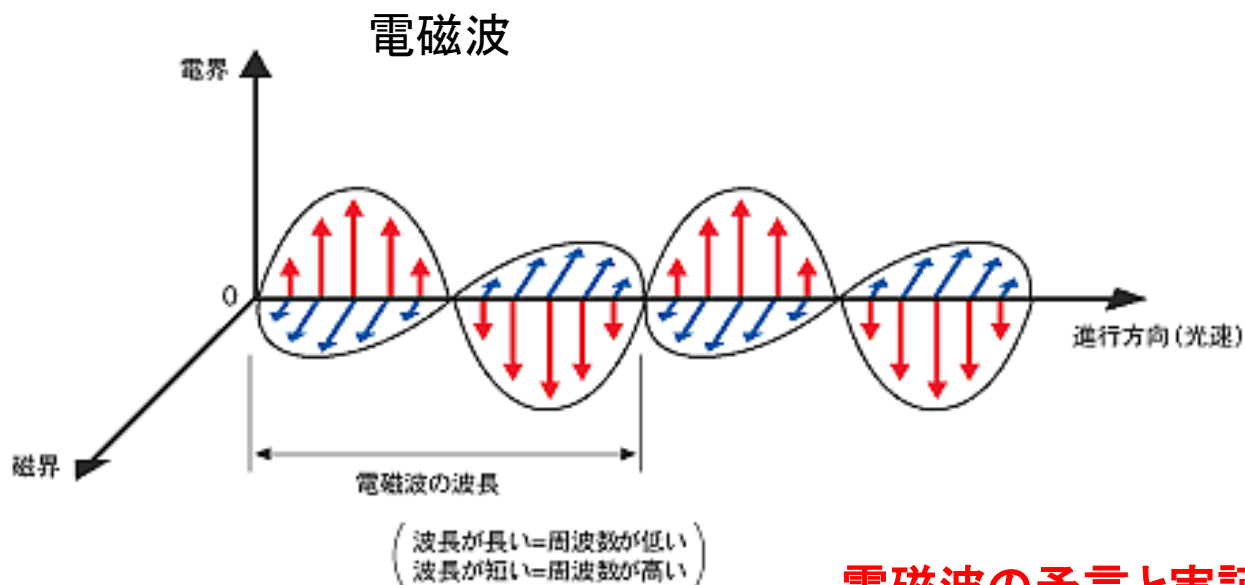


ジェームズ・クラーク・マックスウェル (James Clerk Maxwell, 1831年- 1879年) は、イギリスの理論物理学者。マイケル・ファラデーによる電磁場理論をもとに、1864年にマクスウェルの方程式を導いて古典電磁気学を確立。さらに電磁波の存在を理論的に予想し、その伝播速度が光の速度と同じであることを、および横波であることを示した。また、土星の環や気体分子運動論・熱力学・統計力学などの研究でも知られている。

https://search.yahoo.com/search;_ylt=AIVStqgI35jv3NZTCQbsU4.bvZx4?p=maxwell&toggle=1&cop=mss&ei=UTF-8&fr=yfp-t-901



電磁気学:基礎、思想と応用



電磁波の予言と実証→電磁場の実在性

→現代的な応用; モーター、電灯、電磁 (IH) 調理器、携帯電話など

→(古典的な)場の概念は、古典的原子論、「粒子」概念の対極である

§ 2. 電荷とその素量性、離散性、保存則

乾燥した日における衣服の着脱時の摩擦電気、静電気現象：帯電

帯電した物体間に働く力を電気力(クーロン力)または静電気力という。

- 1) 電気には正・負の2種類があり、同種の電気間には反発力(斥力)が働き、異種の電気の間には引力が働く。
- 2) 2種類の物体をこすり合わせると、一方の物体には正、もう一方の物体には負の電気が生じる。

物理学では、物体の帯びている電気を電荷 (electric charge, charge)という。電荷はあらゆる電気現象および磁気現象の根源にある実体で、クーロン(C)という単位で測られる物理量である。

現在の学問的理解では、負の電気を担う電子、負イオン、正の電気を担うのは陽子や正イオンである。

→電荷の素量性と離散性：電子の電荷は $-e$ で、物体の帯びる電荷は電荷素量 e の整数倍である。

$$e \equiv 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$1\text{C} \equiv 1\text{A} \cdot 1\text{s}$$

電荷の保存則

他の部分から孤立した系(＝閉じた系)の全電荷は、増加も減少もせず一定である。(これまで、この法則が破れた例は見つかっていない。)

電気的中性：

通常の状態では、物質中の原子の原子核の正電荷と電子の負電荷が等量ずる存在して、それらの電気的効果は、非常に高い精度で、打ち消し合っている。

→巨視的物体が電気的に中性ではないと、巨大な電気力で飛散するか、急速に合体(衝突)することになる！

§ 3. 電気力とクーロンの法則

距離 r だけ離れた点電荷 q_1 と q_2 の間の電気力(クーロン力):

大きさ
$$F = k_0 \frac{|q_1 q_2|}{r^2} \dots (3.1)$$

$$k_0 \approx 9.0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2 \dots (3.2)$$

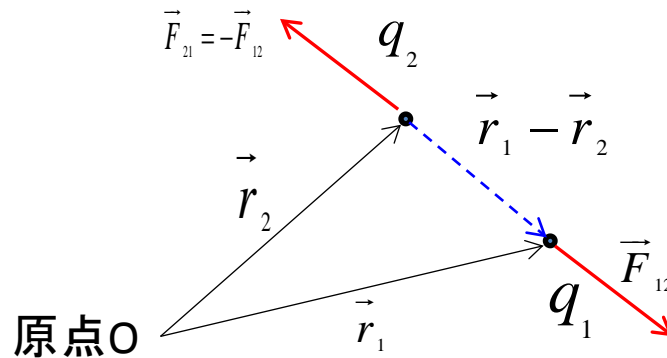
$$\equiv \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \dots (3.3)$$

向き: 2つの電荷が
同符号の場合、反発力(斥力)で、
異符号の場合には引力

ϵ_0 : 電気定数 (旧称: 真空の誘電率)

電気力のベクトル表現

点電荷 q_2 から q_1 に働く電気力 F_{12}



(図は2つの電荷が同符号の場合)

$$\vec{F}_{12} = k_0 \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = k_0 \frac{q_1 q_2 (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \dots (3.4)$$

点電荷 q_1 から q_2 に働く電気力

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \dots (3.5)$$

電気力の重ね合わせの原理: 複数の電荷 (残り2からn番目) から受ける電気力の合成

$$\vec{F}_1 \equiv \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \dots + \vec{F}_{1n} = \sum_{j=2}^n \vec{F}_{1j} \dots (3.6)$$

電気力と重力の比較

1)ミクロの世界では:水素原子の中の、陽子と電子間について

$$\frac{\text{(電気力の大きさ)}}{\text{(重力の大きさ)}} = \text{約}10\text{の}39\text{乗} = 1,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000.$$

水素原子はほとんどすかすかの空間であるが、強烈な電気力が働いているので、電氣的に中性の粒子(中性子)しか容易には通過できない！

2) 超マクロの世界(宇宙空間)では:ほとんどの物体が高い精度で電氣的に中性であり、重力の影響が支配的である。

ほとんどの天体がほぼ球形であることは重力が中心力であること(方向によらず距離だけに依存するという性質)から説明できる。

しかし、微小惑星では(自己)重力が小さいため、球形からほど遠いいびつな形状をしている。

3)人間の体重は結局、地球との重力の大きさである。また人間の筋力の起源は結局、分子間の電気力が源である。老化の進行とともに、筋力が低下し、重力との競合が不可避となる。しかし、筋トレなどにより、その重力との競合時期は先延ばしできる。

§ 4. 電場の概念とその実例・応用

ある電荷 q に(他の電荷の集団から)電気力 F が働く場合の電場(電界) E の定義

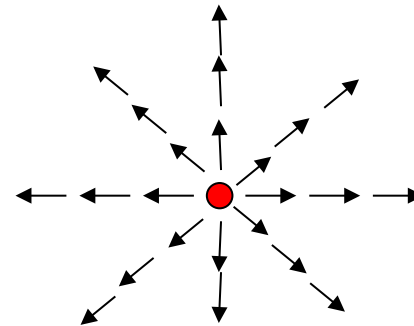
$$\boxed{\vec{E} \equiv \frac{\vec{F}}{q}, [E] = \frac{\text{N}}{\text{C}}} \cdots (4.1)$$

電気力線: その各点における接線ベクトルが電場 E の向きに一致する、向きを持った線。

電場の方向と垂直な単位面積あたり、 E 本の電気力線を描くことにする。

電場(電気力線)の源としての電荷

点電荷のつくる電場、電気力線
(図は $q > 0$ の場合)



電磁気学(19世紀一)

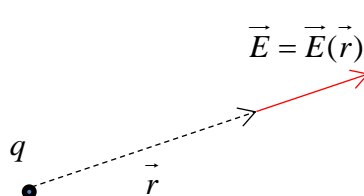
荷電粒子は場(=電磁場)から力を受け、荷電粒子は場を作る。

→場の情報は連続的な座標全体である。

→場の変動を媒介として電磁的な力が有限の速度(光速)で伝わる。

⇔比較: 一人の人間が周囲につくる雰囲気

点電荷 q がそこから距離 r のところにつくる電場 E



$$\vec{E} = k_0 \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \cdots (4.2)$$

$$\rightarrow E_x = k_0 \frac{q}{r^3} \frac{x}{r}, E_y = k_0 \frac{q}{r^3} \frac{y}{r}, E_z = k_0 \frac{q}{r^3} \frac{z}{r} \cdots (4.3)$$

位置ベクトル \vec{r}_1 にある点電荷 q_1 から位置ベクトル \vec{r} にある点の電場ベクトル \vec{E}_1 とそのx、y、z成分 E_{1x}, E_{1y}, E_{1z}

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = k_0 \frac{q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^2} \frac{(\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} = k_0 \frac{q_1 (\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \dots (4.4a)$$

$$\rightarrow E_{1x}(\vec{r}) = k_0 \frac{q_1 (x - x_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3}, E_{1y}(\vec{r}) = k_0 \frac{q_1 (y - y_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3}, E_{1z}(\vec{r}) = k_0 \frac{q_1 (z - z_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \dots (4.4b)$$

電気力の重ね合わせの原理



電場の重ね合わせの原理: 複数の点電荷がつくる電場

i番目の電荷によるある位置における電場を $E_i (i=1, 2, \dots, n)$ から合成される電場 E

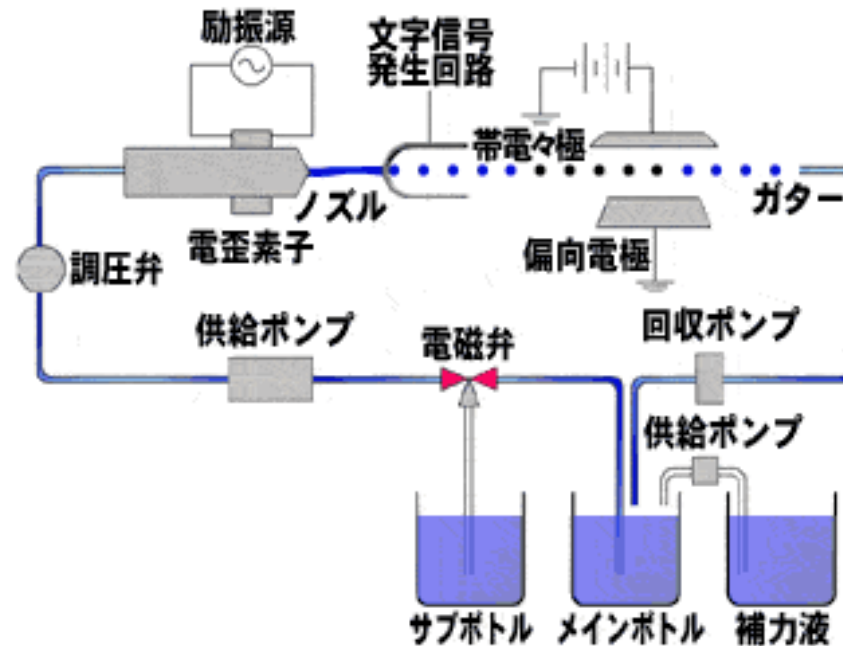
$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i \dots (4.5)$$

⇔比較: 多数の人間関係、グループ間関係や国家間の関係では単純な重ね合わせの法則はほとんど成り立たない!

エレクトロニクスの離れ業 インクジェットプリント方式

文字をドットマトリクスに画素分割し、各画素の位置情報に比例した電圧でインク粒子を帯電。さらにそれを静電場で偏向して印字物に到達させることで印字します。

- ・メインボトルのインクを供給ポンプで加圧し、ノズルから液柱状に噴出させる。
- ・液柱を電歪素子の振動で一定の大きさのインク粒子にする。
- ・インク粒子1個ごとに、帯電電極で印字ドット位置情報に対応した電圧に帯電させる。
- ・帯電したインク粒子は、偏向電極間の通過時に帯電量に応じた偏向を受け、印字物に到達。
- ・印字されないインク粒子は、ガターで捕えて回収ポンプでメインボトルに回収。
- ・サブボトルは使用インク量を、補力液は濃度を、一定に保つようメインボトルに補給する、キメ細かい自動濃度管理を採用しております。



微弱な電気を発生させられる魚の6つの機能

電場による獲物の探知

電場によるナビゲーション(運航)

電気信号による仲間との交信

プラスの電極を用いて獲物の誘因

電気で小魚をしびれさせ、捕まえ、餌とする

自分の身を守る

出典: ジャレド・ダイヤモンド「昨日までの世界(下)」

日本経済新聞社, 2013年. pp.155-158.

著者の学位論文の主題はデンキウナギの発電の分子論的仕組み

サメの第六感 獲物をとらえる電気感覚

R. D. フィールズ



出典 日経サイエンス2007年11月号

http://www.nikkei-science.com/page/magazine/0711/200711_042.html

著者

R. Douglas Fields

原題名

The Shark's Electric Sense (SCIENTIFIC AMERICAN August 2007)

サメはその驚くべき嗅覚で知られている。獲物の血のにおいのかぎつけると、どこからともなくサメが集まってくる。だが、もう1つサメの鼻面には驚くべきセンサーが備わっている。視覚でも、聴覚でも、触覚でもない。それは**周囲の電場を感じとる**感覚、いわば電気感覚とでもいうものだ。

サメの鼻先に孔が点々とあいていて、それらの孔の奥にはゼリー状物質が詰まったチューブがあることが発見されたのは17世紀後半。この構造は発見者の名にちなんで「ロレンチーニ器官」と呼ばれるが、どんな役割を果たすのか長い間わからなかった。19世紀、顕微鏡で調べられ、それが感覚器官であることは見当がついたが、何を感知するのかは依然謎のまま。**電気を感じることがわかったのは、さらに100年後の1960年代になってからだった。**

実は魚はいわば微弱な電池のような存在でもある。魚の細胞中の塩分濃度と海水のそれとが異なることで、魚と海水の間に電位差が生じるのだ。ただ、それによって周囲に作られる電場は非常に微弱だ。ところが実験の結果、海中の1 cm離れた2点間に100万分の1ボルトという電位差が存在するだけでも、サメはそれを感知できることが明らかになった。

サメはこの超高感度の電気センサーを獲物の位置特定に使っているらしい。魚が発生する電場を模擬できる電極を海中に下ろし、電極から少し離れたところに魚のすり身を置いてみた。サメはすり身に引き寄せられるようにやってきたが、最後の瞬間、サメが噛みついたのはすり身ではなく電極の方だった。サメは血のにおいを手がかりに遠方の獲物を探知し、接近してからは電気感覚で相手を“見て”いる可能性が高い。

この能力を逆手にとって、サメを人や魚網から遠ざけることができるかもしれない。それは人を助けるためだけではない。サメの命を救うのにも役立つのだ。毎晩、世界の海では5万匹ものサメが網に誤って捕まっている。サメが電気感覚を狩り以外にどう利用しているのかも興味深い。

参考：電気双極子とその実例

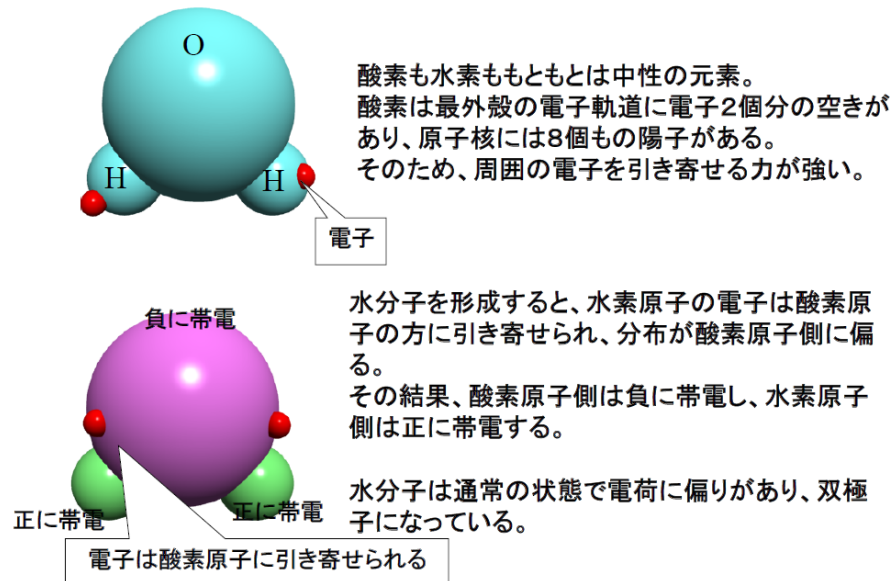
$\pm q$ という一対の電荷が微小距離でだけ離れて分布しているとき、電気双極子 (electric dipole) といい、 $qd=p$ を電気双極子モーメントという。

このような系は全体として電氣的に中性であるが、電荷の空間分布が偏ることにより、周囲の物質に物理的、化学的に大きな効果をもたらす可能性がある。

参考：前田 坦「生物は磁気を感じるか」講談社ブルーバックス。特に、P.161～水と体液の役割など。

北野 康「水の科学(第三版)」NHKブックス、2009年。

水分子の双極子



§ 5. 電位

電気力による位置エネルギー(ポテンシャル)と

ある点に、電荷 q をおいた場合の位置エネルギー(ポテンシャル)が U のとき、
電位(静電ポテンシャル)の定義:

$$\frac{U}{q} \equiv V, [V] = \text{V(ボルト)} \cdots (5.1)$$

$$\rightarrow U = qV \cdots (5.1) \quad \begin{array}{l} \text{(電氣的位位置エネルギー)} \\ = (\text{電荷}) \times (\text{電位差}) \end{array}$$

注意: 電位を V で表す場合、斜体字 V (イタリック、italic)、単位としてのボルトは
立体字 V (ローマン、roman)で記す。電位を ϕ で表す場合もある。

点電荷 q による点 r での電位

$$V(r) = \begin{cases} k_0 \frac{q}{r} \cdots (5.2a) \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \cdots (5.2b) \end{cases}$$

$$(\because) V(r) = - \int_{\infty}^r \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' = - \int_{\infty}^r k_0 \frac{q}{r'^2} dr' = k_0 \frac{q}{r}.$$

← 位置エネルギーの基準点を無限遠方を選ぶ。

複数の点電荷 $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ からそれぞれ距離 $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ による点での電位

$$V = k_0 \frac{q_1}{r_1} + k_0 \frac{q_2}{r_2} + \dots + k_0 \frac{q_n}{r_n} = \sum_{i=1}^n k_0 \frac{q_i}{r_i} \dots (5.3)$$

電位は定義によりスカラー量であるから、複数の電荷からの寄与を単純に加えてよい。

2点間の電位の差を電圧:

静電気力による位置エネルギーの差がある場合、静電気力のする仕事 W

$$W = qV_A - qV_B = q\Delta V \dots (5.4)$$

$$\Delta V \equiv V_A - V_B \dots (5.5)$$

一様な電場 E と電位の関係: 大きさ E の電場の下、距離 Δx だけ変化したときの電位差 ΔV

$\Delta V = E\Delta x \rightarrow E = \frac{\Delta V}{\Delta x} \dots (5.6) \quad (\text{電位}) = \frac{(\text{電位変化})}{(\text{位置変化})}$
--

電場Eが位置座標xとともに変化する場合の電場、電位、電位差の関係

エネルギー基準点O(x_0)からある点xまで(単位電荷あたり)電気力のする仕事

$$V(x) = - \int_{x_0}^x E(x') dx' \dots (5.7)$$

$$E(x) = - \frac{dV(x)}{dx} \dots (5.8)$$

一般の場合の電場と電位、電位差の関係

エネルギー基準点O(x_0, y_0, z_0)から点A(x_A, y_A, z_A)まで(単位電荷あたり)電気力のする仕事

$$V_A = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_A} \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \left(\int_{x_0}^{x_A} E_x dx + \int_{y_0}^{y_A} E_y dy + \int_{z_0}^{z_A} E_z dz \right) \dots (5.9)$$

線積分 (ナブラ・Vと発音)

$$\vec{E} = -\nabla V \leftarrow \text{grd} V \dots (5.10)$$

$$\rightarrow E_x = - \frac{\partial V}{\partial x}, E_y = - \frac{\partial V}{\partial y}, E_z = - \frac{\partial V}{\partial z} \dots (5.11)$$

$$\text{偏微分 } \frac{\partial V}{\partial x} \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{V(x + \Delta x, y, z) - V(x, y, z)}{\Delta x}$$

§ 6 静電場についてのガウスの法則

電場の方向と垂直な単位面積あたり、 E 本の電気力線を描く。

電場の大きさ E 、断面積 $A \rightarrow EA$ 本の電気力線

点電荷 q を取り巻く半径 r の球面を貫く電気力線の本数

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \begin{cases} k_0 \frac{q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = 4\pi k_0 q \cdots (6.1a) \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \cdots (6.1b) \end{cases}$$

球の半径 r に依存しない値となる \rightarrow 一般に成立するに違いない!

静電場についてのガウスの法則(一般の場合)

$$\iint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \begin{cases} 4\pi k_0 Q \cdots (6.2a) \\ \frac{Q}{\epsilon_0} \cdots (6.2b) \end{cases}$$

(閉じた面積分)

Q : 閉曲面 A の内部の電荷の代数和(=電荷の正負を考慮した和)

なぜガウスの法則を考える必要があるのか

実地的な理由:

- 1) 点電荷についてのクーロンの法則から電気力、電場を計算できるが、有限の電荷分布についての計算は一般には困難である。しかし、ガウスの法則を用いれば、特に、一様な直線状分布、平面状・円筒形・円柱形・球状・球面・球殻状の分布など対称性のある電荷分布の場合には、電場の面積分が単純な積になり、電場が容易に計算できる。
- 2) 静電遮蔽(静電シールド)など導体の性質を容易に理解できる。

基本的な理由:

ガウスの法則(積分形)の右辺を電荷密度の積分という形に書き換えて、左辺の面積分をベクトル解析学におけるガウス定理(面積分を体積積分に関係づける公式)を用いて書き直した後、空間内の任意の点のまわりの微小体積に適用すると、ガウスの法則の微分形というものが得られる。

- (1) ここで、電場を電位に変換すると、電荷密度と電位の空間微分を結びつけるポアソン方程式(Poisson's equation)が導かれる。
- (2) 電磁気学の他の3つの基本方程式とともに、これらの微分形の数理的分析から導出されるマクスウェル方程式を構成し、その中から純理論的に波動方程式が導かれ、電磁波の予言、光＝電磁波であるという統一的な認識に高まる契機の出発点になった。

§ 7. 導体の性質とその応用

導体: 電気を通す物体。(⇔絶縁体)

導体の性質

- 1) 平衡状態では、導体の内部の電場はゼロ: $E=0$
- 2) 平衡状態では、導体の内部では正と負の電荷が打ち消しあっていて、電荷密度はゼロ
- 3) 導体表面での電場(電気力線)は導体表面に垂直である。

静電遮蔽(静電シールド)

たとえ、導体の外部に電場があっても、導体内部の電場はゼロである。
導体内部に空洞があっても、空洞の中に、電荷が存在しなければ、空洞の内部でも電場はゼロで、導体に囲まれた空間には、導体の外部の電場は影響しない。

- 自動車に落雷があっても、車内の人は自動車のボディーで電場から遮蔽されて安全である。
- 精密な静電気的な測定をする装置では、接地した金属板でこれを包んで、外部の電气的影響を避けている。
- 金属板ではなくても、金網で包んでも、金網は外部の静電場の影響をよく遮蔽。
- 鉄筋コンクリートの建物内でラジオ(や携帯電話)が聞きにくいのは、この例。