(崩壊系列)filename=decayseries-qa141029.tex

崩壊定数 λ_A の原子（核）A が崩壊してできた原子（核）B が崩壊定数 λ_B の崩壊をする。時刻 $t=0$ における原子（核）A と B の個数をそれぞれ $N_{A0}, 0$ として次の問に答えよ。

1. 任意の時刻 t における原子（核）A の個数 $N_A(t)$ と原子（核）B の個数 $N_B(t)$ を求めよ。
2. 原子（核）B の放射能の強さが最大になる時刻 $t_{\rm max}$ を求めよ。
3. 時刻 $t_{\rm max}$ において、A, B の両原子（核）の放射能の強さは互いに等しいことを示せ。
4. $\lambda_A \ll \lambda_B$ の場合、十分長い時間が経過した時の A, B の両原子（核）の個数の比 $N_B(t)/N_A(t)$ の近似式を求めよ。
5. 天然の鉱石中にはウラン原子（核）（${}^{238}_{92}$U）が 2.78×10^6 個あたり 1 個の割合でラジウム原子（核）（${}^{226}_{86}$Ra）が含まれている。${}^{226}_{86}$Ra の半減期 $T_R = 1620$year として ${}^{238}_{92}$U の半減期 T_U を計算せよ。

[解答例]

1. 原子核 A は崩壊し、B に変わり、さらに B も崩壊するので

$$
\begin{aligned}
dN_{\rm A} &= -\lambda_{\rm A}N_{\rm A}dt, \\
dN_{\rm B} &= -\lambda_{\rm B}N_{\rm B}dt + \lambda_{\rm A}N_{\rm A}dt, \\
\to \frac{dN_{\rm A}}{dt} &= -\lambda_{\rm A}N_{\rm A}, \qquad (1)\\
\frac{dN_{\rm B}}{dt} &= -\lambda_{\rm B}N_{\rm B} + \lambda_{\rm A}N_{\rm A} \qquad (2)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。初期条件を考慮して, 任意の時刻における原子核 A の個数が得られる。

$$N_{\rm A}(t) = N_{\rm A0}{\rm e}^{-\lambda_{\rm A}t}. \qquad (3)$$

式（3）を（2）に代入して、両辺に ${\rm e}^{\lambda_{\rm B}t}$ をかけると

$$
\begin{aligned}
\lambda_{\rm B}N_{\rm B}{\rm e}^{\lambda_{\rm B}t} &+ {\rm e}^{\lambda_{\rm B}t}\frac{dN_{\rm B}}{dt} = \lambda_{\rm A}N_{\rm A0}{\rm e}^{(\lambda_{\rm B}-\lambda_{\rm A})t}] \\
\to \frac{d}{dt}[{\rm e}^{\lambda_{\rm B}t}N_{\rm B}] &= \lambda_{\rm A}N_{\rm A0}{\rm e}^{(\lambda_{\rm B}-\lambda_{\rm A})t} \\
\to {\rm e}^{\lambda_{\rm B}t}N_{\rm B} &= \int_0^t \lambda_{\rm A}N_{\rm A0}{\rm e}^{(\lambda_{\rm B}-\lambda_{\rm A})t}dt \\
&= \left(\frac{\lambda_{\rm A}}{\lambda_{\rm B}-\lambda_{\rm A}}\right)N_{\rm A0}\left[{\rm e}^{(\lambda_{\rm B}-\lambda_{\rm A})t}-1\right] \\
\to N_{\rm B}(t) &= \left(\frac{\lambda_{\rm A}}{\lambda_{\rm B}-\lambda_{\rm A}}\right)N_{\rm A0}\left[{\rm e}^{-\lambda_{\rm A}t}-{\rm e}^{-\lambda_{\rm B}t}\right] \qquad (4)
\end{aligned}
$$

2. 核種Bの放射能の強さ $A_B(t)$ は $\lambda_B N_B(t)$ だから, その大きさが最大になるのは、個数 $N_B(t)$ が最大になるときだから、

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{dN_\mathrm{B}}{dt} \\
&= -\left(\frac{\lambda_\mathrm{A}}{\lambda_\mathrm{B}-\lambda_\mathrm{A}}\right) N_\mathrm{A}(0)\left[\lambda_\mathrm{A}\mathrm{e}^{-\lambda_\mathrm{A}t_\mathrm{max}} - \lambda_\mathrm{B}\mathrm{e}^{-\lambda_\mathrm{B}t_\mathrm{max}}\right] \\
\to \mathrm{e}^{-\lambda_\mathrm{B}t_\mathrm{max}} &= \frac{\lambda_\mathrm{A}}{\lambda_\mathrm{B}}\mathrm{e}^{-\lambda_\mathrm{A}t_\mathrm{max}}, \qquad (5) \\
\to t_\mathrm{max} &= \frac{\log_\mathrm{e}(\frac{\lambda_\mathrm{B}}{\lambda_\mathrm{A}})}{\lambda_\mathrm{B}-\lambda_\mathrm{A}}. \qquad (6)
\end{aligned}
$$

3. 核種Bの放射能の強さ $A_B(t)$ は $\lambda_B N_B(t)$ だから、式 (4) と（5）より

$$
\begin{aligned}
\lambda_\mathrm{B}N_\mathrm{B}(t_\mathrm{max}) &= \lambda_\mathrm{B}\left(\frac{\lambda_\mathrm{A}}{\lambda_\mathrm{B}-\lambda_\mathrm{A}}\right)N_\mathrm{A0}\left[\mathrm{e}^{-\lambda_\mathrm{A}t_\mathrm{max}} - \mathrm{e}^{-\lambda_\mathrm{B}t_\mathrm{max}}\right] \\
&= \lambda_\mathrm{B}\left(\frac{\lambda_\mathrm{A}}{\lambda_\mathrm{B}-\lambda_\mathrm{A}}\right)N_\mathrm{A0}\left[\mathrm{e}^{-\lambda_\mathrm{A}t_\mathrm{max}} - \frac{\lambda_\mathrm{A}}{\lambda_\mathrm{B}}\mathrm{e}^{-\lambda_\mathrm{A}t_\mathrm{max}}\right] \\
&= \lambda_\mathrm{A}N_\mathrm{A0}\mathrm{e}^{-\lambda_\mathrm{A}t_\mathrm{max}} = \lambda_\mathrm{A}N_\mathrm{A}(t_\mathrm{max}). \qquad (7)
\end{aligned}
$$

この結果は横軸に時間 t、縦軸に放射能の強さ $\lambda N(t)$ をとった場合、原子核AとBについてのグラフが交わる点において、Bの放射能の強さ（そして個数も）が最大になり、かつそこで原子核A,Bの放射能の強さが等しいことを意味する。

4. 式（3),(4) より

$$
\begin{aligned}
\frac{N_\mathrm{A}(t_\mathrm{max})}{N_\mathrm{B}(t_\mathrm{max})} &= \left(\frac{\lambda_\mathrm{B}-\lambda_\mathrm{A}}{\lambda_\mathrm{A}}\right)\frac{1}{1-[\mathrm{e}^{-\lambda_\mathrm{A}t_\mathrm{max}} - \mathrm{e}^{-\lambda_\mathrm{B}t_\mathrm{max}}]} \\
\to &\approx \frac{\lambda_\mathrm{B}}{\lambda_\mathrm{A}} \qquad (8)
\end{aligned}
$$

5. 前問の結果と崩壊定数 λ と半減期 T の関係、$T = \mathrm{ln}2/\lambda$ を用いて

$$
\begin{aligned}
\frac{T_U}{T_R} &= \frac{\lambda_R}{\lambda_U} \approx \frac{N_U(t_{max})}{N_R(t_{max})} \\
\to T_U &= T_R\frac{N_U(t)}{N_R(t)} \\
&= 1620\mathrm{year} \times \frac{2.78\times10^6}{1} \\
&= 4.5\times10^9\mathrm{year}. \qquad (9)
\end{aligned}
$$

すなわち、ウラン238核の半減期は約45億年である。（これは地球の推定年令とほぼ同じで、われわれの宇宙の推定年令約138億年と矛盾しない結果である。）