（単振動の一般解と特殊解 1; filename=harmonic-vibration2-qa080616.tex）

つりあいの位置からの変位 x に比例する復元力（$F(x) = -kx; k = \mathrm{constant}$）を受けている粒子（質量 m）について, 時間を t とすれば次の運動方程式が成立する。

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx. \tag{1}$$

次の問いに答えよ。定数を $k/m \equiv \omega_0^2$ と置き換えてよい。

1. この微分方程式の一般解を書き、それがこの微分方程式を満たすことを示せ。ただし、積分定数はことわった上で、導入してよい。
2. 初期条件 ($t = 0$ で、変位が 0, 速度が $v_0(> 0)$) の場合の特殊解を求めよ。

（解答例）

1. 一般解は、次の例のように、いくつかの表現が可能である。

$$\begin{aligned} x &= A\cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (A, \alpha : \text{積分定数}) && (2)\\ x &= A\sin(\omega_0 t + \beta), \quad (A, \beta : \text{積分定数}) && (3)\\ x &= A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t). \quad (A, B : \text{積分定数}) && (4)\end{aligned}$$

一般解（2）がもとの微分方程式を満たすかど うかを調べる。

$$\begin{aligned} x &= A\cos(\omega_0 t + \alpha), && (5)\\ \frac{dx}{dt} &= -A\omega_0\sin(\omega_0 t + \alpha) && (6)\\ \frac{d^2x}{dt^2} &= -A\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \alpha) && (7)\\ &= -\omega_0^2 x && (8)\\ \rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} &= -kx. && (9)\end{aligned}$$

他の一般解も、ほぼ同様にして、もとの微分方程式を満たすことが分かる。(各自確認せよ。)

2. 初期条件を一般解に代入して、積分定数を求める。

$$\begin{aligned} 0 &= A\cos\alpha, && (10)\\ v_0 &= -A\omega_0\sin\alpha. && (11)\end{aligned}$$

式 (11) より, 三角関数の位相の周期性を考えると、$\alpha = \pi/2, 3\pi/2$ という二つの場合を調べればよい。

(a) $\alpha = \pi/2$ の場合。式 (10) に代入して、次の特殊解が得られる。

$$A = -\frac{v_0}{\omega_0} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
\rightarrow x &= -\frac{v_0}{\omega_0}\cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}) \\
&= \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) \qquad (13)
\end{aligned}$$

(b) $\alpha = 3\pi/2$ の場合。式 (10) に代入して特殊解

$$\begin{aligned}
A &= \frac{v_0}{\omega_0}, \qquad (14) \\
\rightarrow x &= \frac{v_0}{\omega_0}\cos(\omega_0 t + \frac{3\pi}{2}) \\
&= \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) \qquad (15)
\end{aligned}$$

が得られる。

結局、いずれの場合も同じ特殊解が得られる。