

多粒子系の力学

filename=manyparticlesystem060630.tex

(*) 印の部分はやや難。

1 多粒子系の力と運動方程式

3個以上の n 粒子からなる多粒子系の中の i 番目の粒子の質量を m_i 、ある基準点(原点とする)からの位置ベクトルを \mathbf{r}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) とする。一粒子系の場合と異なり、多粒子系の中の各粒子には、働く力は、系の外部から働く力(外力、external force)だけではなく、系内の他の粒子から働く力、内力(または相互作用、interaction)がある。一般に、 i 番目の粒子に働く外力ベクトルを $\mathbf{F}_i^{(e)}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) とする。また、 i 番目の粒子に j 番目 ($j \neq i$) の粒子から働く内力を \mathbf{F}_{ij} とすると、 i 番目の粒子の運動方程式は

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{j=1, j \neq i}^n \mathbf{F}_{ij}, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.1)$$

と与えられる。ここで、記号 $\sum_{j=1, j \neq i}^n$ は i 以外の $1, 2, \dots, n$ についての和

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n \equiv \sum_{j=1}^{i-1} + \sum_{j=i+1}^n \quad (1.2)$$

を意味する。

多粒子系のすべての粒子についての運動方程式を辺々加えると

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \mathbf{F}_{ij} \quad (1.3)$$

となる。ここで、ニュートンの力と運動の第三法則(作用反作用の法則)

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (1.4)$$

を使うと

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \mathbf{F}_{ij} &= (\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \dots + \mathbf{F}_{1n}) \\ &\quad + (\mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23} + \dots + \mathbf{F}_{2n}) \\ &\quad \dots \dots \dots \\ &\quad + (\mathbf{F}_{n1} + \mathbf{F}_{n2} + \dots + \mathbf{F}_{n, n-1}) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

が得られる。この結果を、式(1.3)の右辺第二項に代入すると

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \right) = \mathbf{F}^{(e)}, \quad (1.6)$$

$$\mathbf{F}^{(e)} \equiv \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{(e)} \quad (1.7)$$

となり、多粒子系全体の移動運動すなわち並進には内力の効果は現れないことがわかる。ここで、 $\mathbf{F}^{(e)}$ は多粒子系に働く外力の合力 (外力ベクトルのベクトル和) である。(多粒子系における作用反作用の法則の適用の仕方について、多粒子系の中の任意の 2 粒子のそれぞれに働く内力の和は必ずしも等大逆向きではないことを注意する。例えば、3 粒子系の 1 番目に働く内力の和 ($\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13}$) は、2 番目に働く内力の和 ($\mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23}$) とは等大逆向きにならない。)

ここで、次のように定義される多粒子系の全運動量ベクトル \mathbf{P}

$$\mathbf{P} \equiv \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i \quad (1.8)$$

を式 (1.6) の左辺に代入すると、

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}^{(e)} \quad (1.9)$$

と書ける。この式は 多粒子系の全運動量ベクトルの時間的変化率は外力ベクトルの和に等しくなるという関係が成り立つことを意味する。

特に、外力のベクトル和のどれか一つの成分でもゼロであれば、たとえ外力のベクトル和の他の成分がゼロでなくても、全運動量の対応する成分は時間的に保存されることも示す。例えば、外力のベクトル和の x 成分がゼロであれば、全運動量ベクトルの x 成分は保存される。

$$F_{1x}^{(e)} + F_{2x}^{(e)} + \cdots + F_{nx}^{(e)} = 0 \rightarrow (m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} + \cdots + m_n v_{nx} = \text{一定}) \quad (1.10)$$

これで 多粒子系における運動量保存則 が証明できたことになる。

2 多粒子系の重心運動と相対運動

多粒子系の全質量を

$$M \equiv \sum_{i=1}^n m_i = m_1 + m_2 + \cdots + m_n \quad (2.1)$$

と定義する。多粒子系の重心 G(center of gravity) または質量中心 (center of mass) の位置ベクトル \mathbf{R} を

$$\mathbf{R} \equiv \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + \cdots + m_n \mathbf{r}_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} \quad (2.2)$$

と定義する。重心座標ベクトルを x, y, z 成分 (X, Y, Z) で表すと

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= (X, Y, Z) \\ &= \left(\frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{M}, \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{M}, \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{M} \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

となる。重心の速度ベクトルも同様に

$$\mathbf{V} \equiv \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \dot{\mathbf{R}}, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z) = \left(\frac{dX}{dt}, \frac{dY}{dt}, \frac{dZ}{dt} \right) \quad (2.5)$$

と定義する。

次に、重心から測った i 番目の粒子の相対位置ベクトル \mathbf{r}'_i と相対速度ベクトル \mathbf{v}'_i を

$$\mathbf{r}'_i \equiv \mathbf{r}_i - \mathbf{R}, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.6)$$

$$\rightarrow \mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i + \mathbf{R}, \quad (2.7)$$

$$\mathbf{v}'_i \equiv \frac{d\mathbf{r}'_i}{dt} = \dot{\mathbf{r}}'_i, \quad (2.8)$$

$$\rightarrow \mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i + \mathbf{V} \quad (2.9)$$

と定義する。重心座標ベクトルと全質量の定義を用いると、有用な関係式

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i &= \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i - \left(\sum_{i=1}^n m_i \right) \mathbf{R} = 0 \\ \rightarrow \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i &= 0, \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}'_i = 0. \quad (2.11)$$

が得られる。関係式 (2.10) は多粒子系 (n 粒子系) の独立な座標ベクトルは本来 n 個であるが、重心座標ベクトルを導入した結果、相対位置ベクトルのすべてが独立ではなくなることを意味する。例えば、 $\mathbf{r}'_n = -\sum_{i=1}^{n-1} m_i \mathbf{r}'_i / m_n$ となるように、どれかひとつの \mathbf{r}'_i が他の \mathbf{r}'_j , ($j = 1, 2, \dots, n, j \neq i$) から定まる。この式を時間で微分すると式 (2.11) が得られる。

多粒子系全体の移動運動すなわち並進の方程式 (1.6) に重心の位置ベクトル (2.2) と重心速度ベクトル (2.4) を代入すると、

$$M \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = \mathbf{F}^{(e)}, \quad (2.12)$$

$$\rightarrow M \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{F}^{(e)} \quad (2.13)$$

と書ける。これらの関係式から、多粒子系の重心運動について次のことがわかる。

1. (1) 各粒子の相対位置がたとえ時間的に変化するとしても、多粒子系の重心は外力の和によってきまる運動を行うこと。实例としては、砲弾または花火が破裂したあとの部分と重心の関係など。
2. (2) 外力のベクトル和のどれか一つの成分でもゼロであれば、たとえ外力のベクトル和の他の成分がゼロでなくても、重心の速度ベクトルの対応する成分は時間的に保存されることがわかる。すなわち、一樣な運動 (等速直線運動) を続ける。例えば、外力のベクトル和の x 成分がゼロであれば、重心速度ベクトルの x 成分 V_x は保存され

る。さらに、初め、重心の x 座標 X が静止していたとすれば、その後の重心の x 座標 X は保存される。各粒子の相対位置がたとえ変化するとしても、重心の座標は初めの値と同じになる。

3 多粒子系の仕事とエネルギー

3.1 仕事・エネルギー定理

多粒子系における i 番目の粒子の運動方程式 (1.1) の両辺と速度ベクトル $d\mathbf{r}_i/dt$ との内積をとり、全粒子について和をとると

$$\sum_{i=1}^n m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} \cdot \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{(e)} \cdot \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \mathbf{F}_{ij} \cdot \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}. \quad (3.1)$$

ここで、右辺の第二項を作用反作用の法則 ($\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$) を用いて書きなおすと

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \mathbf{F}_{ij} \cdot \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} &= (\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \dots) \cdot \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + (\mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23} + \dots) \cdot \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} \\ &\quad + (\mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32} + \dots) \cdot \frac{d\mathbf{r}_3}{dt} + \dots \\ &= \mathbf{F}_{12} \cdot \frac{d(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{dt} + \mathbf{F}_{13} \cdot \frac{d(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3)}{dt} + \dots \\ &= \sum_{1 \leq i < j}^n \mathbf{F}_{ij} \cdot \frac{d\mathbf{r}_{ij}}{dt} \end{aligned} \quad (3.2)$$

となる。ここで i 番目の粒子の j 番目の粒子に対する相対位置ベクトル \mathbf{r}_{ij} を次式で定義する。

$$\mathbf{r}_{ij} \equiv \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j \quad (3.3)$$

(重心からの相対位置ベクトルとは異なることに注意する。) 一方、左辺は

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \left(\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right)^2 \right] \quad (3.4)$$

と書ける。この式の変形において、任意のベクトル A に対する記法 $A \cdot A = A^2$ と、変数 x の任意の関数 $f(x)$ の微分についての、 $df^2(x)/dx = 2f(x) \cdot df/dx$ という公式を用いた。ここで $[\]$ 内は多粒子系の全運動エネルギー K である。

両辺を時刻 t_1 から時刻 t_2 まで積分すると

$$K(t_2) - K(t_1) = \sum_{i=1}^n W_i^{(e)}(t_2, t_1) + \sum_{1 \leq i < j}^n W_{ij}(t_2, t_1), \quad (3.5)$$

$$W_i^{(e)}(t_2, t_1) \equiv \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_i^{(e)} \cdot \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} dt = \int_{\mathbf{r}_i(t_1)}^{\mathbf{r}_i(t_2)} \mathbf{F}_i^{(e)} \cdot d\mathbf{r}_i, \quad (3.6)$$

$$W_{ij}(t_2, t_1) \equiv \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{ij} \cdot \frac{d\mathbf{r}_{ij}}{dt} dt = \int_{\mathbf{r}_{ij}(t_1)}^{\mathbf{r}_{ij}(t_2)} \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij} \quad (3.7)$$

となる。ここで、 $W_i^{(e)}(t_2, t_1)$ は i 番目の粒子に働く外力 $F_i^{(e)}$ が時刻 t_1 から t_2 の間にした仕事で、式 (3.5) の右辺第 1 項は 多粒子系に外力のする全仕事 である。

一方、 $W_{ij}(t_2, t_1)$ は i 番目の粒子と j 番目の粒子に働く内力 (相互作用) F_{ij} が時刻 t_1 から t_2 の間にする仕事である。式 (3.5) の右辺第 2 項は 多粒子系に内力がする全仕事 である。結局、一粒子の場合と同じように、式 (3.5) は力のする仕事と運動エネルギー変化が等しいという 仕事エネルギー定理の一般化 になっている。

(注意：内力のする仕事 W_{ij} は F_{ij} が i 番目の粒子にする仕事と F_{ji} が j 番目の粒子にする仕事の和になっていて、 W_{ji} と区別されず ($W_{ij} = W_{ji}$)、 ij の 1 対について意味を持つものである。したがって、式 (3.5) の 2 重和に $i < j$ という制限がついている。この和を制限をつけずに $\sum_{i \neq j} W_{ij}/2$ と書くこともできる。)

3.2 内力 (相互作用) に対するポテンシャル (*)

内力 (相互作用) F_{ij} が 2 粒子間の相対位置ベクトル \mathbf{r}_{ij} だけの関数となる場合を考える。一粒子の場合と同様に、ここで、 i, j 番目の粒子のそれぞれの位置ベクトルの変化 ($\mathbf{r}_i^A \rightarrow \mathbf{r}_i^B, \mathbf{r}_j^A \rightarrow \mathbf{r}_j^B$) とそれらの間の相対位置ベクトルの変化 $\mathbf{r}_{ij}^A \rightarrow \mathbf{r}_{ij}^B$ (図?参照) に対して、その変化に沿った線積分が、その変化の道筋によらないとき、すなわち、任意の閉曲線に沿った線積分の値がゼロになる、

$$\oint \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij} = 0 \quad (3.8)$$

が成り立つ場合を考える。このとき、この性質をもつ内力を、ある基準点 (その相対位置ベクトル \mathbf{r}_{0ij}) から任意の点 (その相対位置ベクトル \mathbf{r}_{ij}) までの線積分によって、内力に対応するポテンシャル

$$U_{ij}(\mathbf{r}_{ij}) = - \int_{\mathbf{r}_{0ij}}^{\mathbf{r}_{ij}} \mathbf{F}_{ij}(\mathbf{r}'_{ij}) \cdot d\mathbf{r}'_{ij} \quad (3.9)$$

を定義する。

ここで、一粒子系の場合と同様にして、保存力の性質をもつ内力 (相互作用) とそのポテンシャルとの関係

$$\mathbf{F}_{ij}(\mathbf{r}_{ij}) = -\text{grad}_{\mathbf{r}_{ij}} U_{ij}(\mathbf{r}_{ij}) \quad (3.10)$$

が得られる。ここで記号 $\text{grad}_{\mathbf{r}_{ij}}$ は相対位置ベクトル \mathbf{r}_{ij} について grad をとるという意味である。 $U_{ij}(\mathbf{r}_{ij})$ は粒子 i, j 間の内力のポテンシャルと呼ばれる。

ここで記号 $\text{grad}_{\mathbf{r}_{ij}}$ の明示的な表現を調べておく。ベクトル $\mathbf{r}_{ij}, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j$ のそれぞれの座標成分を $(x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}), (x_i, y_i, z_i), (x_j, y_j, z_j)$ とすると

$$x_{ij} = x_i - x_j, y_{ij} = y_i - y_j, z_{ij} = z_i - z_j \quad (3.11)$$

である。すると記号 $\text{grad}_{\mathbf{r}_{ij}}$ は

$$\text{grad}_{\mathbf{r}_{ij}} \equiv \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y_{ij}} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z_{ij}} \quad (3.12)$$

を意味している。ポテンシャル関数 U_{ij} は変数 (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}) であるが、 $(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j)$ の関数であると思なして、 x_i, y_i, z_i について偏微分すると関係式 (3.11) に注意して

$$\frac{\partial U_{ij}}{\partial x_i} = \frac{\partial U_{ij}}{\partial x_{ij}} \frac{\partial x_{ij}}{\partial x_i} + \frac{\partial U_{ij}}{\partial y_{ij}} \frac{\partial y_{ij}}{\partial x_i} + \frac{\partial U_{ij}}{\partial z_{ij}} \frac{\partial z_{ij}}{\partial x_i} = \frac{\partial U_{ij}}{\partial x_{ij}}, \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial U_{ij}}{\partial y_i} = \frac{\partial U_{ij}}{\partial x_{ij}} \frac{\partial x_{ij}}{\partial y_i} + \frac{\partial U_{ij}}{\partial y_{ij}} \frac{\partial y_{ij}}{\partial y_i} + \frac{\partial U_{ij}}{\partial z_{ij}} \frac{\partial z_{ij}}{\partial y_i} = \frac{\partial U_{ij}}{\partial y_{ij}}, \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial U_{ij}}{\partial z_i} = \frac{\partial U_{ij}}{\partial x_{ij}} \frac{\partial x_{ij}}{\partial z_i} + \frac{\partial U_{ij}}{\partial y_{ij}} \frac{\partial y_{ij}}{\partial z_i} + \frac{\partial U_{ij}}{\partial z_{ij}} \frac{\partial z_{ij}}{\partial z_i} = \frac{\partial U_{ij}}{\partial z_{ij}} \quad (3.15)$$

が得られ、 U_{ij} を (x_i, y_i, z_i) について偏微分した結果と同じであることがわかる。この結果を用いると

$$\text{grad}_{\mathbf{r}_i} U_{ij} = \text{grad}_{\mathbf{r}_{ij}} U_{ij} = -\mathbf{F}_{ij} \quad (3.16)$$

となる。同様に、 x_j, y_j, z_j について偏微分をとると

$$\text{grad}_{\mathbf{r}_j} U_{ij} = -\text{grad}_{\mathbf{r}_{ij}} U_{ij} = \mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji} \quad (3.17)$$

を得る。したがって、粒子 i に働く内力、外力を問わず、一般にそれらのポテンシャル関数の r_i についての $-\text{grad}$ をとればよい。そこで、内力の全ポテンシャルを

$$U^{(\text{in})} \equiv \sum_{1 \leq i < j} U_{ij} \quad (3.18)$$

と定義すると、一粒子に働く保存力とそのポテンシャルの関係と同じように、 i 番目の粒子に働く内力 (保存力) は対応するポテンシャルによって

$$\sum_{j=1(\neq i)}^n \mathbf{F}_{ij} = -\text{grad}_{\mathbf{r}_i} U^{(\text{in})} \quad (3.19)$$

と表される。

3.2.1 内力が中心力の場合のポテンシャル

ここで内力が中心力の場合のポテンシャルを求める。中心力 $\mathbf{F}_{ij}(\mathbf{r}_{ij})$ は相対距離 $r_{ij} (\equiv |\mathbf{r}_{ij}|)$ だけの関数 $f(r_{ij})$ により

$$\mathbf{F}_{ij}(\mathbf{r}_{ij}) = f r_{ij} \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}} \quad (3.20)$$

と書ける。関数 $f(r_{ij})$ はスカラー量である。式 (3.9) と式 (3.20) により、

$$U_{ij}(\mathbf{r}_{ij}) = - \int_{\mathbf{r}_{0ij}}^{\mathbf{r}_{ij}} f(r'_{ij}) \frac{\mathbf{r}'_{ij} \cdot d\mathbf{r}'_{ij}}{r'_{ij}} \quad (3.21)$$

である。しかし、一般に

$$\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot d\mathbf{r} = dr \quad (3.22)$$

である。この式は次のように証明できる。簡単のために、2次元平面上の運動を考える。ある時刻における位置ベクトル \mathbf{r} の方向の単位ベクトルを \mathbf{e}_r 、とそれ垂直な方向 (角度 θ の増加する向き) の単位ベクトル \mathbf{e}_θ とする。すると、 $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ 、 $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\theta = 0$ である。変位ベクトル $d\mathbf{r}$ は $d\mathbf{r} = dr\mathbf{e}_r + r d\theta\mathbf{e}_\theta$ と表すことができる。ここで、この両辺と位置ベクトル \mathbf{r} との内積をとると、式 (3.22) が得られる。

この結果を用いると、中心力に対するポテンシャルの式 (3.21) は

$$U_{ij}(r_{ij}) = - \int_{r_{0ij}}^{r_{ij}} f(r'_{ij}) dr'_{ij} \quad (3.23)$$

で与えられる。この結果は、中心力は粒子が半径 (または動径) に垂直な向きに変位しても仕事をしないために、そのポテンシャルは半径だけで決まることを意味している。内力のポテンシャルの基準点 r_{0ij} はしばしば無限遠点 ($r_{0ij} \rightarrow \infty$) が採用される。

1. 万有引力 (重力) ポテンシャル

質量 m_i, m_j の2粒子間に働く万有引力 (重力) は、重力定数を G として

$$\mathbf{F}_{ij} = -G \frac{m_i m_j}{(r_{ij})^2} \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}} \quad (3.24)$$

と与えられる。そのポテンシャルは、式 (3.23) より

$$\begin{aligned} U_{ij}(\mathbf{r}_{ij}) &= - \int_{r_{0ij}}^{r_{ij}} \left[-G \frac{m_i m_j}{(r'_{ij})^2} \right] dr'_{ij} \\ &= -G \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \end{aligned} \quad (3.25)$$

と表される。質量と重力定数は正符号をもつので、重力ポテンシャルの値は一般に負値をもつ。

2. クーロン・ポテンシャル

電荷 q_i, q_j をもつ i, j 番目の粒子間のクーロン力は単位系により定まる定数 k を用いて

$$\mathbf{F}_{ij} = k \frac{q_i q_j}{(r_{ij})^2} \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}} \quad (3.26)$$

と与えられる。そのポテンシャルは、式 (3.23) より

$$\begin{aligned} U_{ij}(\mathbf{r}_{ij}) &= - \int_{r_{0ij}}^{r_{ij}} \left[k \frac{q_i q_j}{(r'_{ij})^2} \right] dr'_{ij} \\ &= k \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \end{aligned} \quad (3.27)$$

と表される。電荷の積の符号により、クーロンポテンシャルは正または負符号をもつことに注意する。定数 k は SI(MKSA) 単位系の場合、 $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$ と与えられ、 ϵ_0 は真空の誘電率である。

3.3 多粒子系における力学的エネルギーの保存

まず、内力が保存力の性質をもつとする。時刻 t における各粒子の位置ベクトル $\mathbf{r}_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) が与えられたとき、式 (3.18) で与えられる内力の全ポテンシャル

$$U^{(in)}(t) \equiv \sum_{1 \leq i < j}^n U_{ij}(\mathbf{r}_{ij}(t)) \quad (3.28)$$

をこの多粒子系の時刻 t における内部位置エネルギーともいう。内力のポテンシャルの定義 (3.9) と時刻 t_1, t_2 間に内力のする仕事の定義 (3.7) より

$$W_{ij}(t_2, t_1) = U^{(in)}(t_2) - U^{(in)}(t_1) \quad (3.29)$$

が得られる。これを式 (3.5) に代入すると

$$[K(t_2) + U^{(in)}(t_2)] - [K(t_1) + U^{(in)}(t_1)] = \sum_{i=1}^n W_i^{(e)}(t_2, t_1) \quad (3.30)$$

となる。これが 内力が保存力の性質を持つ場合の、仕事・運動エネルギー定理 である。

さらに、内力に加えて、外力も保存力である場合、時刻 t における外力 $\{\mathbf{F}_i^{(e)}, i = 1, 2, \dots, n\}$ のポテンシャルを $U_i^{(e)}(\mathbf{r}_i(t))$ 、

$$\mathbf{F}_i^{(e)} = -\text{grad}U_i^{(e)}(\mathbf{r}_i(t)) \quad (3.31)$$

とする。全外力による位置エネルギー

$$U^{(e)}(t) \equiv \sum_{i=1}^n U_i^{(e)}(\mathbf{r}_i(t)) \quad (3.32)$$

とすると、

$$\sum_{i=1}^n W_i^{(e)}(t_2, t_1) = U^{(e)}(t_2) - U^{(e)}(t_1) \quad (3.33)$$

と表されるから、式 (3.30) は

$$[K(t_2) + U^{(in)}(t_2) + U^{(e)}(t_2)] = [K(t_1) + U^{(in)}(t_1) + U^{(e)}(t_1)] \quad (3.34)$$

となる。この関係式は多粒子系の全力学的エネルギーを

$$E(t) \equiv K(t) + U^{(in)}(t) + U^{(e)}(t) \quad (3.35)$$

で定義するとき、個々の項 $K(t), U^{(in)}(t), U^{(e)}(t)$ は時刻に依存しても、その和 E は時間的に一定、すなわち保存されることを意味する。

内力も外力も保存力である場合には、多粒子系の全力学的エネルギーは保存する。 ここで、

$$U \equiv U^{(in)} + U^{(e)} \quad (3.36)$$

を多粒子系の全位置エネルギーという。式 (3.31) と式 (3.19) より、

$$\begin{aligned} -\text{grad}_{\mathbf{r}_i} U &= -\text{grad}_{\mathbf{r}_i} \sum_{j=1}^n U_j^{(e)}(\mathbf{r}_j) - \sum_{1=i < j}^n \text{grad}_{\mathbf{r}_i} U_j^{(e)}(\mathbf{r}_j) \\ &= \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{j(\neq i)} \mathbf{F}_{ij} \end{aligned} \quad (3.37)$$

となるから、多粒子系における任意の粒子の運動方程式は

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = -\text{grad}_{\mathbf{r}_i} U \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.38)$$

と表される。

3.4 多粒子系の全エネルギーの重心および相対運動への分離

3.4.1 全運動エネルギーの重心および相対運動への分離

多粒子系の全運動エネルギー K は、式 (2.11) を用いれば

$$K \equiv \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i |\mathbf{v}'_i + \mathbf{V}|^2 \quad (3.39)$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i (v'_i)^2 + \left(\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}'_i \right) \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n m_i \right) V^2 \quad (3.40)$$

$$\rightarrow K = K_G + K^{(\text{in})}, \quad (3.41)$$

$$K_G \equiv \frac{1}{2} M V^2, \quad K^{(\text{in})} \equiv \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i (v'_i)^2 \quad (3.42)$$

と書ける。この式は多粒子系の運動エネルギー K が、重心 G に全質量 M が集中したと考えたときの重心の運動エネルギー K_G と、重心が静止しているみなす座標系 (= 重心座標系) での各粒子の運動エネルギーの和、すなわち、相対運動エネルギー $K^{(\text{in})}$ との和として表されることを意味する。

3.4.2 全エネルギーの重心および相対運動への分離

以上の結果より、多粒子系の全エネルギー (力学的エネルギー) は

$$E = [K_G + U^{(e)}] + [K^{(\text{in})} + U^{(\text{in})}] \quad (3.43)$$

で与えられる。ここで、 $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j = \mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j$ だから、式 (3.43) の右辺の中括弧部分

$$E^{(\text{in})} \equiv K^{(\text{in})} + U^{(\text{in})} \quad (3.44)$$

は各粒子の、重心に対する相対座標と相対速度のみで表されていることがわかる。そこで、 $E^{(\text{in})}$ を 多粒子系の内部エネルギー という。

参考：熱力学または気体分子運動論に重要な物理量としての内部エネルギーはここで定義した内部エネルギーに対応する。

特に、孤立系では外力はなく ($F^{(e)} = 0$)、そのポテンシャル $U^{(e)} = 0$ とおける。また、この場合の重心運動は式 (2.12) より、 $M(d^2\mathbf{R}/dt^2) = 0$ で与えられるから、一粒子の場合と同様にして、重心の運動エネルギーは一定、

$$K_G = \text{一定} \quad (3.45)$$

である。力学的エネルギー保存則とあわせると、

$$E^{(\text{in})} \equiv K^{(\text{in})} + U^{(\text{in})} = \text{一定} \quad (3.46)$$

という結果を得る。すなわち、孤立系では、多粒子系の内部エネルギーが保存する。

注意：重心運動について、式 (2.12) が成り立つが、一般には

$$K_G + U_G \neq \text{一定} \quad (\text{一般の外力の場合}) \quad (3.47)$$

である。というのは、

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} = - \sum_i \text{grad}_{\mathbf{r}_i} U^{(e)} \quad (3.48)$$

であって、一般には

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} \neq -\text{grad}_{\mathbf{R}} U^{(e)} \quad (3.49)$$

であるから。しかし、この式が成り立つ特殊な、しかし重要な場合、すなわち、外力が重力だけの場合には

$$K_G + U_G = \text{一定} \quad (\text{外力が重力の場合}) \quad (3.50)$$

となる。

4 多粒子系の回転運動

4.1 多粒子系の角運動量、トルクと回転運動

3個以上の n 粒子からなる多粒子系の中の i 番目の粒子の質量を m_i 、位置ベクトルを \mathbf{r}_i 、速度ベクトルを $\mathbf{v}_i (\equiv d\mathbf{r}_i/dt)$ とすると、この多粒子系の全角運動量 L は

$$\mathbf{L} \equiv \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times (m_i \mathbf{v}_i) \quad (4.1)$$

と与えられる。ここで、記号 \times は二つのベクトルのベクトル積 (外積) を表すことに注意する。一方、 i 番目の粒子の運動を支配する方程式 (1.1) の両辺に、この粒子の位置ベクトル \mathbf{r}_i とのベクトル積をとり、すべての粒子について和をとる。

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \sum_{j=1, j \neq i}^n \mathbf{F}_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4.2)$$

となる。式 (4.2) の左辺は、ベクトル積の性質、 $(d\mathbf{r}_i/dt) \times (d\mathbf{r}_i/dt) = 0$ を用いると

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^n \left(\mathbf{r}_i \times m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right) \right] = \frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times (m_i \mathbf{v}_i) \right] = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad (4.3)$$

となる。一方、式 (4.2) の右辺第二項は、作用反作用の法則 (1.4) を用いると

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \sum_{j=1, j \neq i}^n \mathbf{F}_{ij} &= \mathbf{r}_1 \times (\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \cdots) + \mathbf{r}_2 \times (\mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23} + \cdots) \\ &\quad + \mathbf{r}_3 \times (\mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32} + \cdots) + \cdots \\ &= [\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{21}] + [\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{13} + \mathbf{r}_3 \times \mathbf{F}_{31}] + \cdots \\ &= (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_{12} + (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) \times \mathbf{F}_{13} + \cdots \end{aligned} \quad (4.4)$$

と書ける。通常そうであるように、内力 \mathbf{F}_{ij} が 2 粒子 i, j を結ぶ直線に沿って働けば、すなわち、 $\mathbf{F}_{ij} // (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ ならば、最後の式の右辺のすべての項はそれぞれゼロになる。すなわち、内力の効果は相互に打ち消しあう。したがって、

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}^{(e)}, \quad (4.5)$$

$$\mathbf{N}^{(e)} \equiv \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(e)} \quad (4.6)$$

が得られた。したがって、

多粒子系の全角運動量の時間変化率は外力によるトルク (力のモーメント) に等しい。

特に、外力によるトルク (力のモーメント) の成分の一つでもゼロであれば、全角運動量の対応する成分は時間的に保存される。これを 角運動量の保存則 という。もちろん、外力によるトルク (力のモーメント) ベクトルがゼロであれば、全角運動量ベクトルが保存される。この場合、多粒子系の角運動量に垂直で時間的に変化しない一定の平面が存在することになる。

4.2 多粒子系の公転と自転の方程式

ここで、多粒子系の重心と相対座標を導入することにより、全角運動量がどのように表されるかを調べる。式 (2.6) と (2.8) を全角運動量 (4.1) に代入して、式 (2.10) と (2.11) を用いれば

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_{i=1}^n (\mathbf{R} + \mathbf{r}'_i) \times m_i (\mathbf{V} + \mathbf{v}'_i) \\ &= \mathbf{R} \times (M\mathbf{V}) + \mathbf{R} \times \left(\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}'_i \right) + \left(\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i \right) \times \mathbf{V} + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i \\ &= \mathbf{R} \times (M\mathbf{V}) + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i \\ \rightarrow \mathbf{L} &= \mathbf{L}_G + \mathbf{L}' \end{aligned} \quad (4.7)$$

のように、全角運動量がふたつの部分に分離される。ここで、 L_G は重心に質量 M が集中したときのある基準点 (原点) のまわりの重心の角運動量であり、 L' は重心が静止しているとみなす座標系 (= 重心座標系) での各粒子の角運動量の和、であり、

$$L_G \equiv \mathbf{R} \times (M\mathbf{V}), \quad (4.8)$$

$$L' \equiv \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i \quad (4.9)$$

と定義される。同様に、トルクについても

$$\mathbf{N}^{(e)} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{R} + \mathbf{r}'_i) \times \mathbf{F}_i^{(e)} \quad (4.10)$$

$$\rightarrow \mathbf{N}^{(e)} = \mathbf{N}_G^{(e)} + \mathbf{N}^{(e)'}, \quad (4.11)$$

$$\mathbf{N}_G^{(e)} \equiv \mathbf{R} \times \mathbf{F}^{(e)}, \quad \mathbf{N}^{(e)'} \equiv \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i^{(e)} \quad (4.12)$$

が得られる。ここで、 $\mathbf{N}_G^{(e)}$ は外力の和から重心にかかるトルクであり、 $\mathbf{N}^{(e)'}$ は重心が静止しているとみなす座標系 (= 重心座標系) での各粒子に作用するトルクの和である。

次に、重心に関する角運動量の時間変化率を考えると

$$\begin{aligned} \frac{dL_G}{dt} &= \frac{d}{dt} [\mathbf{R} \times (M\mathbf{V})] = \frac{d\mathbf{R}}{dt} \times (M\mathbf{V}) + \mathbf{R} \times M \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{R} \times M \frac{d\mathbf{V}}{dt} \\ \rightarrow \frac{dL_G}{dt} &= \mathbf{N}_G^{(e)} \end{aligned} \quad (4.13)$$

が得られる。この式は ある基準点 (原点) のまわりの重心の回転運動 (= 公転) を支配する方程式 である。ここで、 $d\mathbf{R}/dt = \mathbf{V}$, $\mathbf{V} \times \mathbf{V} = 0$ であることを用いた。

さらに、式 (4.13) を式 (4.5) に代入し、関係 (4.7) と (4.11) を用いるとすると

$$\frac{dL'}{dt} = \mathbf{N}^{(e)'} \quad (4.14)$$

が得られる。この式は 重心のまわりの回転運動 (= 自転) を支配する方程式 である。式 (4.14) は 多粒子系の重心が複雑な運動をしていたとしても、重心のまわりの角運動量の時間的な変化率は重心のまわりのトルクの和に等しいこと を意味する。

(参考: 回転という日本語に対応する英語は rotation である。公転は revolution である。自転が rotation である。しかし、英語の revolution には革命という意味もある。これは、17 世紀、コペルニクスの地動説 (太陽中心説) が認められて以後、元来、天文学の用語であった revolution (公転) が大きな社会的な変化を意味するようにもなったことによる。静止していて宇宙の中心とみなされていた大地 (地球) が太陽の周りを運動をしていること、すなわち宇宙の中心ではなくなったことの、当時の人々にとっての衝撃の大きさが想像される。)

ここで、すでに述べた運動量保存則と角運動量保存則とは次のような違いがあることに注意する。

1. 外力の合力がゼロの場合には、運動量保存則により、多粒子系の重心は一様な運動(等速度運動)を続ける。そして、粒子の相対的な位置が変化しても、重心の運動には変化を生じない。

2. 角運動量保存則の場合、全角運動量は一定でも、粒子の相対的な位置を変化させることによって、重心のまわりの回転運動(自転)を変化させることができる。

例えば、質量の無視できる棒で結びつけられた質量 m の 2 粒子系の回転を考える。外力は働かない条件下で、2 粒子の距離が $2r_1$ から $2r_2$ に短縮されたとする。 $(r_1 > r_2)$ 。それぞれの場合の自転の角速度を ω_1, ω_2 とすると、この 2 粒子系の角運動量の大きさはそれぞれ、 $L_1 = 2mr_1^2\omega_1, L_2 = 2mr_2^2\omega_2$ となる。しかし、角運動量は保存される ($L_1 = L_2$) ので、 $\omega_1 < \omega_2$ となり、自転の角速度が増加する。

このような粒子間の相対的な位置を変化させるには内力(相互作用)が必要である。人間や猫などの動物には、これに該当する場合が多い。飛び板飛び込みの際の人体や宙返りする猫など。この意味で、人体や動物は(内力により)変形しうる多粒子系とみなすことができる。