(慣性モーメントの計算と性質;moment-inertia1-qa060727.tex)
長さ ℓ の一様な細い棒の一端Oを鉛直面内でつるし、その回りに自由に回転できるとする。この棒の質量を M, 重力の加速度を g として次の問いに答えよ。

1. 点Oを通る軸のまわりの慣性モーメント I を計算せよ。
2. 点Oを通る軸に平行で重心Gを通る軸のまわりの慣性モーメント I_G を計算せよ。
3. I と I_G について慣性モーメントの平行軸の定理を確認せよ。

（解答例）

1. 棒は一様であるから、その線密度 $\lambda = M/\ell$ となる。従って、棒の幅 dx の質量 $dm = \lambda dx = M dx/\ell$ となる。慣性モーメントの定義より

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{x=0}^{x=\ell} x^2 dm = \frac{M}{\ell}\int_0^\ell x^2 dx \\
&= \frac{1}{3}M\ell^2. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

2. 前問と同じように、しかし、積分の範囲に注意して、

$$
\begin{aligned}
I_G &= \int_{x=-\ell/2}^{x=+\ell/2} x^2 dm = \frac{M}{\ell}\int_{x=-\ell/2}^{x=+\ell/2} x^2 dx = \frac{M}{\ell}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\ell/2}^{+\ell/2} \\
&= \frac{1}{12}M\ell^2 \qquad (2)
\end{aligned}
$$

3. 2つの平行軸の距離は $\ell/2$ であるから、平行軸の定理より

$$
\begin{aligned}
I &= I_G + M(\frac{\ell}{2})^2 \\
&= \frac{1}{12}M\ell^2 + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{3}M\ell^2 \qquad (3)
\end{aligned}
$$

となり、前前問において求めた結果と一致する。