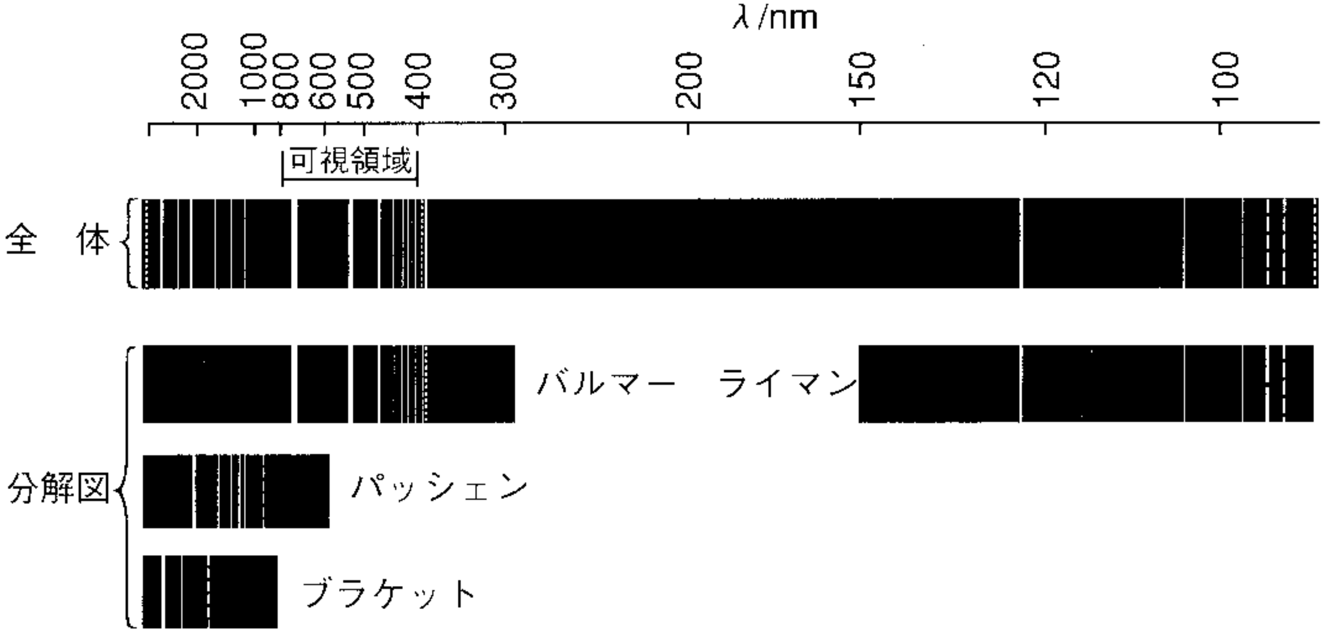
水素原子のボーア模型ー過渡的理論ー

目次

Made by R. Okamoto (Emeritus Prof., Kyushu Inst. of Tech.)
filename=Bohr-model-summary141027.ppt

1. 水素原子のスペクトル(実験)とその規則性



離散的スペクトル
（線スペクトル）の経験則

$$\frac{1}{\lambda_{n_2 \to n_1}} \propto \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right); \quad n_1 < n_2 : \text{正整数}$$

$$\to \frac{1}{\lambda_{n_2 \to n_1}} = R_{\text{exp}} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right); \quad R_{\text{exp}} = 1.09677 \times 10^7 \,\text{m}^{-1}.$$

リドベリ（Rydberg）定数

$n_1 = 1, (n_2 = 2, 3, \cdots):$ ライマン系列

$n_1 = 2, (n_2 = 3, 4, \cdots):$ バルマー系列

$n_1 = 3, (n_2 = 4, 5, \cdots):$ パッシェン系列

$n_1 = 4, (n_2 = 5, 6, \cdots):$ ブラケット系列

ボーア（Niels Hendrick David Bohr, デンマーク, 1885-1962）

受賞年：1922年
受賞部門：ノーベル物理学賞
受賞理由：原子構造とその放射に関する研究

・1997年に107番元素がボーアの名にちなみ「ボーリウム」と命名された。
・ボーアは若い頃サッカーが得意だったが、デンマーク代表としてオリンピックに出場し銀メダルを獲得したのは弟のハラルト・ボーアである。ハラルトは数学者で、リーマンのゼータ関数を研究し、また概周期関数を発見した。
・1975年には、息子のオーゲ・ニールス・ボーアもノーベル物理学賞を受賞した。(原子核構造における集団運動，統一模型）
・父のクリスティアン・ボーア（Christian Bohr）は、ボーア効果で知られる生理学者である。
・「紋章」陰と陽、光と闇の互いが互いを生み出す、東洋の図面、太極図であったことからもうかがえる。その紋章は、デンマークのフレデリック城に、世界の王室・元首の紋章とともに飾られている。

2. ボーア模型の基本的仮定

ボーア（Niels Hendrick David Bohr, デンマーク, 1885-1962）

基本的仮定

(1)原子内の電子は，古典力学の法則に従って，電子と原子核の間で電気的引力を受けながら，原子核のまわりに円運動を行う。

(2)量子条件：電子の(軌道）角運動量は$h/(2\pi)$の整数倍のみ許される。h :プランク定数。

(3)電子は定常状態の場合には電磁波を放出(吸収）しない。

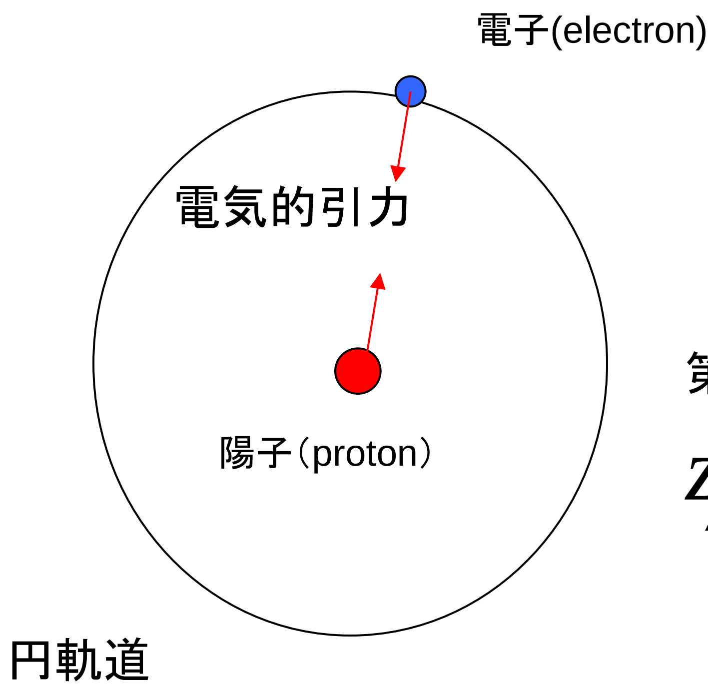
(4)振動数条件：状態遷移の場合，その振動数 f は二つの定常状態a,bのエネルギー差により

$$E_a - E_b = hf$$

で与えられる。

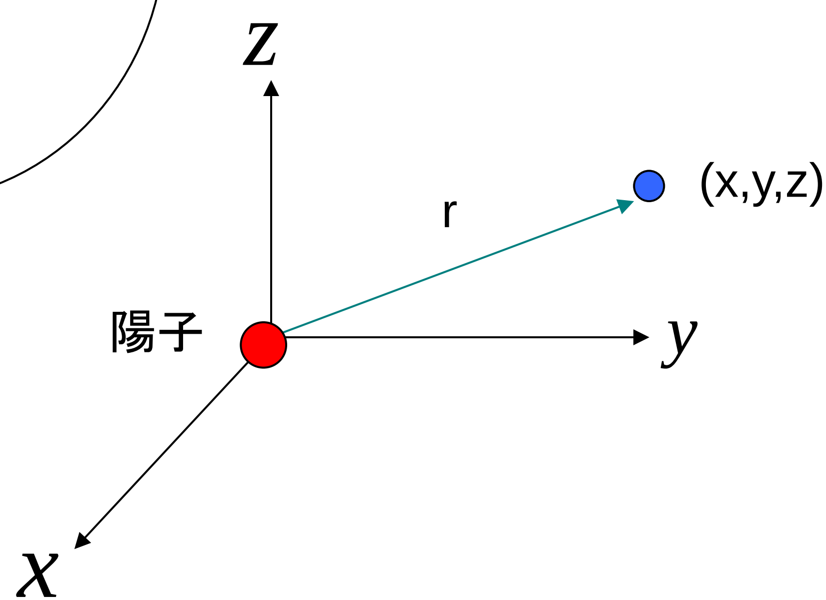
静止した陽子から見た電子の円運動

電子質量m，陽子質量M



質量比 $\dfrac{m}{M} \approx \dfrac{1}{1840}$

第1近似で、陽子は静止していると仮定。



3. ボーア模型の結果

電子と陽子の間の電気的引力が円運動の向心力の役割を果たすので、向心向きの運動方程式は次のようになる。

$$m\frac{v^2}{r} = k_0\frac{e^2}{r^2} \cdots (1) \quad (k_0 : \text{電気力の比例定数})$$

電子の力学的エネルギーEは次のように書ける。

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - k_0\frac{e^2}{r} \cdots (2)$$

今，電気力は引力で，そのポテンシャルはマイナスの値であることに注意

(角運動量についての）量子条件より

$$r \cdot mv = n\hbar, (n = 1, 2, \cdots) \cdots (3) \quad \hbar \equiv \frac{h}{2\pi}$$

式(3)を(1)に代入すると

$$m\frac{1}{r}\left(\frac{n\hbar}{mr}\right)^2 = k_0\frac{e^2}{r^2} \rightarrow r_n \equiv \frac{1}{k_0}\left(\frac{\hbar^2}{me^2}\right)n^2 \cdots (4)$$

量子数n=1の場合の半径をボーア半径r_{B}と呼ぶ。

$$r_{\mathrm{B}} \equiv \frac{1}{k_0}\left(\frac{\hbar^2}{me^2}\right)\cdots(5)$$

$$= 4\pi\varepsilon_0\left(\frac{\hbar^2}{me^2}\right)\cdots(5')$$

$$\cong 0.53\times10^{-10}\,\mathrm{m}=0.53\,\mathrm{A}=5.3\,\mathrm{nm}$$

$$1\mathrm{A} \equiv 10^{-10}\,\mathrm{m}=10\mathrm{nm}$$

式(5)を(3)に代入すると

$$v = k_0\,\frac{e^2}{n\hbar}\cdots(6)$$

式(5)と(6)を(2)に代入すると

$$E=\frac{1}{2}m\left(\frac{k_0e^2}{n\hbar}\right)^2-k_0e^2\frac{k_0me^2}{n^2\hbar^2}$$

$$\rightarrow E_n=-\left(k_0^2\frac{me^4}{2\hbar^2}\right)\cdot\frac{1}{n^2}\cdots(7)$$

$$=-\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left(\frac{me^4}{2\hbar^2}\right)\cdot\frac{1}{n^2}\cdots(8),\ k_0\equiv\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\text{(MKSA単位系)}$$

$$\equiv-\frac{|E_1|}{n^2}$$

$$\cong-\frac{13.6\ \mathrm{eV}}{n^2}\cdots(8)$$

力学的エネルギーのマイナスの値は電子が陽子のクーロン力により空間的に束縛されていることを意味する。

離散的なエネルギー（量子化されたエネルギー） → エネルギー準位

参考：微細構造定数を用いた別表現

$$E_n=-\left(\frac{\alpha^2\cdot mc^2}{2}\right)\frac{1}{n^2},$$

$$\alpha\equiv k_0\frac{e^2}{c\hbar};\text{微細構造定数}$$

微細構造定数は、その定義式から分かるように、無次元の量である。

微細構造定数

国際単位系（MKSA単位系）と静電単位系（cgsesu単位系）において、電気力の比例定数を与えると(付録参照）、それに対応して微細構造定数も定義されるが、その数値は二つの単位系で同じになる。これは微細構造定数αが無次元量であるから当然である。

$$c\hbar = 1973.27053\,\mathrm{eV}\cdot\mathrm{A}\,;$$

$$1\,\mathrm{eV} \equiv 1.60210\times 10^{-19}\ \mathrm{J},\ 1\,\mathrm{A} \equiv 10^{-10}\ \mathrm{m}$$

$$\alpha_{\mathrm{MKSA}} \equiv k_0^{\mathrm{MKSA}} \times \frac{e^2}{c\hbar} = 8.98755\times 10^9\,\mathrm{Nm}^2\mathrm{C}^{-2} \times \frac{(1.60210\times 10^{-19}\mathrm{C})^2}{1973.27053\,\mathrm{eV}\cdot\mathrm{A}}$$

$$= \frac{1}{137.036},$$

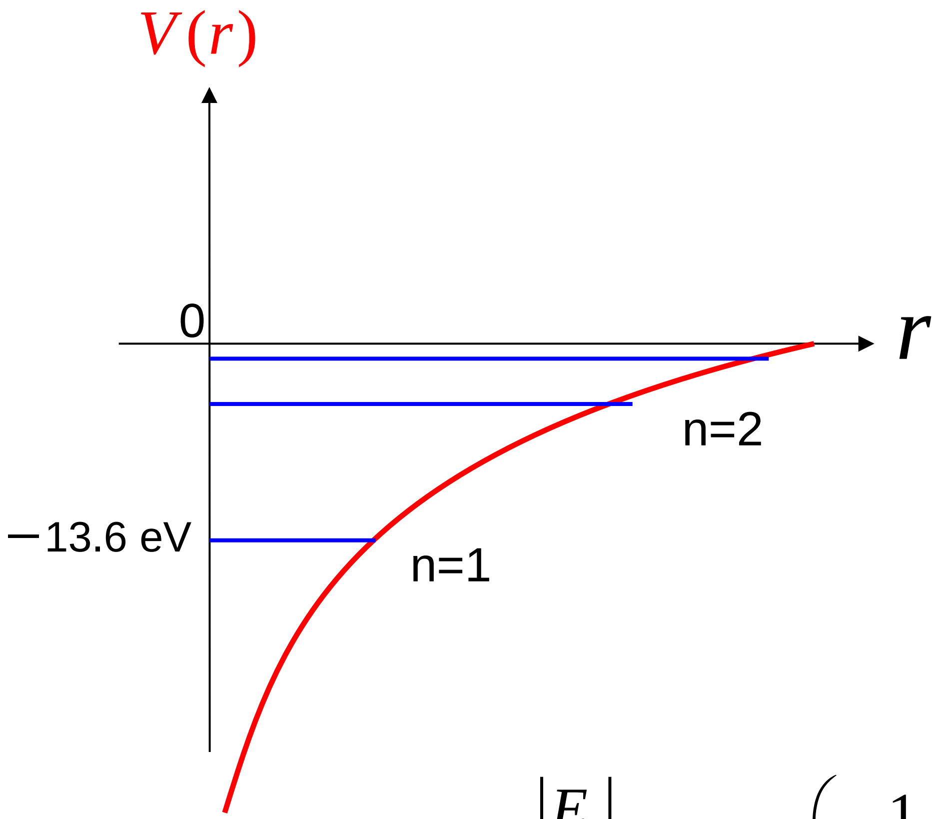
$$\alpha_{\mathrm{cgsesu}} \equiv k_0^{\mathrm{cgsesu}} \times \frac{e^2}{c\hbar} = \mathrm{dyne}\cdot\mathrm{cm}^2\cdot(\mathrm{esu})^{-2} \times \frac{(4.80298\times 10^{-10}\mathrm{esu})^2}{1973.27053\,\mathrm{eV}\cdot\mathrm{A}}$$

$$= \frac{1}{137.036}$$

$$mc^2 = 0.91093897\times 10^{-30}\,\mathrm{kg}\times 2.99792458\times 10^8\,\mathrm{m/s}$$

$$= 0.51099906\times 10^6\,\mathrm{eV} \simeq 0.5\times 10^6\ \mathrm{eV}$$

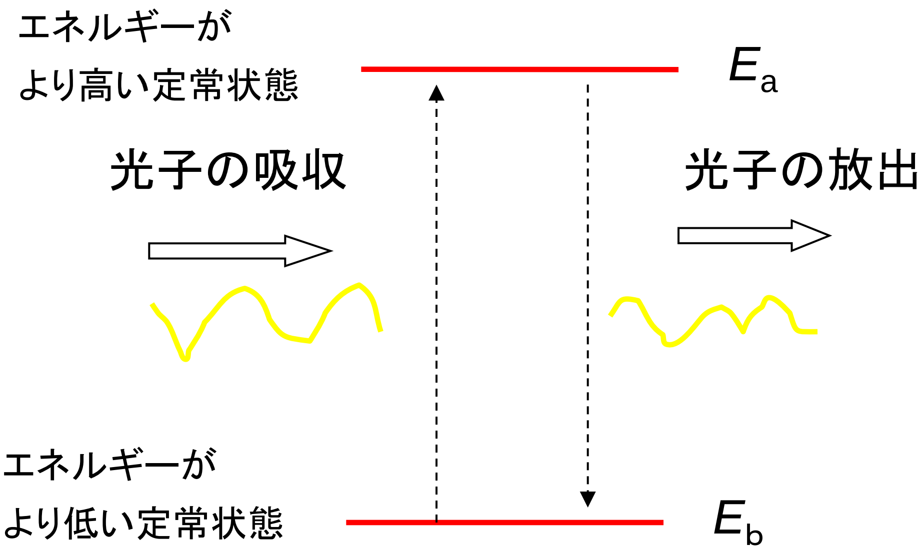
量子化されたエネルギー



$$E_n = -\frac{|E_1|}{n^2} \quad |E_1| \equiv \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \left(\frac{m_e e^4}{2\hbar^2}\right) (n = 1, 2, \cdots)$$

$$|E_1| \approx 13.6\ \mathrm{eV}$$

量子状態遷移と光の放出・吸収



光子のエネルギー(*hf*)と波長λ, 振動数 *f*

$$hf \cong E_a - E_b \,;\, hf = \frac{ch}{\lambda},$$

←(近似的)エネルギー保存則

$$E_n \cong -\frac{13.6\ \mathrm{eV}}{n^2}$$

$$a = 2, b = 1;$$

$$\rightarrow E_2 - E_1 \cong 10.2\mathrm{eV},$$

$$\lambda \cong 121.6\mathrm{nm} = 121.6 \times 10^{-9}\ \mathrm{m}$$

リュドベリの公式，リュドベリ定数の導出

$$hf \cong E_n - E_{n'}\ ;\ hf = \frac{ch}{\lambda}$$

$$\rightarrow \frac{ch}{\lambda} = -\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \left(\frac{me^4}{2\hbar^2}\right)\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2}\right)$$

$$\rightarrow \frac{1}{\lambda} = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \left(\frac{me^4}{4\pi c\hbar^3}\right)\left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\rightarrow \frac{1}{\lambda} = R_\infty \cdot \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$R_\infty \equiv \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \left(\frac{me^4}{4\pi c\hbar^3}\right)$$

陽子を静止した近似：

陽子の質量を無限大（∞大）にみなした

$$\cong 1.09737318\ \mathrm{m}^{-1} \qquad R_{\mathrm{exp}} = 1.09677 \times 10^7\ \mathrm{m}^{-1}$$

R_∞とR_{exp}とは3桁も一致している；3桁しか一致していない！

しかし，陽子の質量Mの有限性を考慮し，電子質量mを，電子・陽子系の換算質量μに置き換えると

$$R_{\mathrm{cal}} \equiv \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \left(\frac{\mu e^4}{4\pi c\hbar^3}\right),\ \mu \equiv \frac{mM}{m+M}$$

$$\cong 1.096775965\ \mathrm{m}^{-1}$$

6桁も一致する！！

5. ボーア模型の問題点

問題点:

電子の安定性を説明できない(仮定している)。

放出される光(色)の強さの違いがあることを説明できない。

「電子は原子核のまわりを、人工衛星のように、周回する」という素朴な(しかし、誤りの)イメージが広まった。

原子の惑星理論はまじめにとってはいけない！

バークレー物理コース「量子物理（上）」丸善出版、1972年。pp.43-44.

52　よく知られているように，ボーアはもっとずっと先まで進むことができた．実際，彼は水素原子のスペクトルを定量的に説明することができ，これは新しい考えの目ざましい成功であった．量子条件は古典物理にとってはまったく新しいものであった．加うるに，ボーアは水素原子の基底状態にある電子の運動は，電磁波の放射をしないという仮定をせねばならなかった．さもなければ，電子は古典電磁気学に従ってらせん運動をし，ごく短時間（10^{-8}sec 程度）のうちに原子核にぶつかってしまう．

この原子の惑星理論は真面目にとってはいけない．実際それはまったく間違っている．水素原子という特別な場合にこの理論がうまくいったのは，幸運な（あるいは不運な）偶然によるものであった．幸運であるというのは，それがボーアをはじめ他の人々の，原子の量子論をつくろうとする努力への励ましとなったからである．この理論のために誰かが，原子は惑星系に似ていると信じ込むとすれば，それは不運なことである．ボーア自身は愚かではなかった．彼は自分の理論を，今日存在するより完全な理論を探求するさいの中間的な段階にすぎないと見ていた．

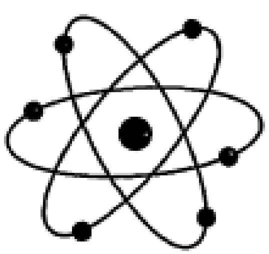
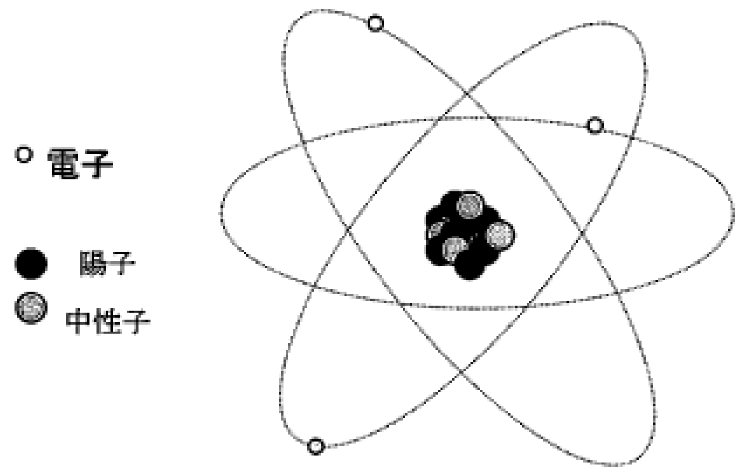


図 52A　原子時代のシンボル．これは原子構造とはまったく何の関係もない．このような形の図は，"原子"と何らかの関係のある会社，政府機関その他の組織のシンボルとして広く使われている．広告にはしばしば，非常に空想的な図が見られる．それには電子の非常な高速度が，蒸気の尾（おそらくエーテル中の蒸気の尾）のようなもので示されている．

それが単なるシンボルであると考えられるかぎりでは何の害もないが，誰かが誤解して，原子は実際にこのように見えると信じ込む危険性が問題である．

原子と原子核のイメージの虚実

過度に単純化された図

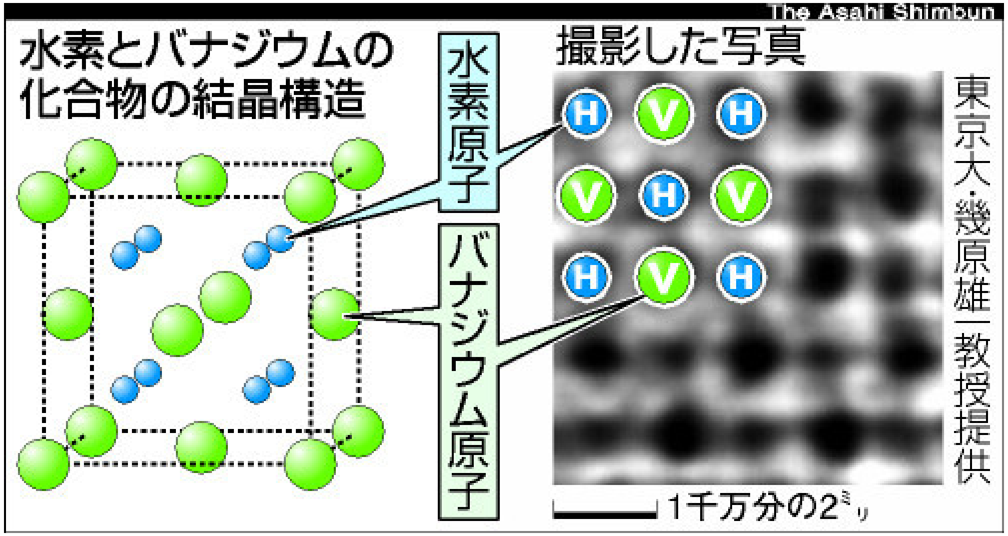


「電子が惑星のように、原子の周りをめぐっているというイメージは、意識からも、できれば無意識からも追い払ってもらいたい。完全に間違っているからだ。それはサイエンスフィクションといってもよく、すでに息の根を止められ、退けられた原子模型である。なぜ間違いかというと、電子はよく知られた意味での粒子とは違って、波のような性質も持っているからである。」

P.アトキンス「ガリレオの指」（早川書房、2004年）、6章　原子、特にp. 180.

原子核を構成している陽子、中性子は相互に接触しながら静止しているのではない！

水素原子の撮影



元素の中で最も小さい水素原子の撮影に、東京大の幾原雄一教授（材料科学）らのチームが初めて成功した。

撮影に使ったのは「走査透過型」と呼ばれる最先端の電子顕微鏡。水素原子の大きさは1千万分の1ミリ程度しかない。これとほぼ同じ細さにしぼった電子のビームを、水素とバナジウムの化合物の結晶にぶつけ、結晶中の水素原子をとらえた。

電子顕微鏡は、ピンぼけを防ぐ技術が開発されたことを背景に、どれだけ小さなものを撮影できるかの競争が近年、世界で激化している。

幾原教授は「すべての元素が見える時代になってきた。水素を使う燃料電池など、次世代のエネルギー技術の開発にもつながる」と話している。（小宮山亮磨）

朝日新聞2010. 11.12

付録：国際単位系、静電単位系における電気力と電気量

目次

1. 物理学における文字、文字式の意味

（文字、文字式）＝（数値）x（単位）

質量m、Mの二つの物体が距離rだけ離れている場合の、
重力（万有引力）の大きさF

$$F = G\frac{mM}{r^2} \qquad G = 6.6742\times 10^{-11}\,\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2}{(\mathrm{kg})^2}$$

物理量は斜体(italic)で、単位は立体（roman）で記す。
同じ単位のものしか加減はできない。違う単位の物理量でも割り算、掛け算はできる。

$$\left[\frac{F}{\mathrm{N}}\right] = 6.6742\times 10^{-11}\,\frac{\left[\dfrac{m}{\mathrm{kg}}\right]\left[\dfrac{M}{\mathrm{kg}}\right]}{\left[\dfrac{r}{\mathrm{m}}\right]^2}$$

２．電気力における単位系

電磁気学においては、歴史的な事情と、マクロ系かミクロ系のいずれに主たる関心があるかにより、複数の単位系が使用されてきた。それらは長所とともに短所があり、それらの相互の関係は必ずしも理解が容易ではない。ここでは，電気力（クーロン力）の数式的表現に直結する、国際単位系（MKSA単位系）と静電単位系（cgsesu単位系）を比較検討する。

一般に、電気量Q，Q’をもつ二つの電荷が距離rだけ離れている場合の電気力の大きさFは、電荷の積に比例し、距離に反比例するので、比例係数をk_0として、以下のように表される。

$$F = k_0 \frac{QQ'}{r^2}$$

3. 国際単位系における電気力と電気量

国際単位系（MKSA単位系）では長さを[m],電気量をクーロン[C]、力をニュートン[N]で測り、比例係数k_0は次のように決められている。

$$F = k_0^{\mathrm{MKSA}} \frac{QQ'}{r^2},$$

$$k_0^{\mathrm{MKSA}} \equiv \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \quad (\varepsilon_0 : \text{真空の誘電率})$$

$$= 8.98755 \times 10^9\ \mathrm{Nm^2C^{-2}} \simeq 9 \times 10^9\ \mathrm{Nm^2C^{-2}}$$

この式は次のように書き直すと、意味がより鮮明になる。

$$\left[\frac{F}{\mathrm{N}}\right] = 8.98755 \times 10^9 \frac{\left[\frac{Q}{\mathrm{C}}\right]\left[\frac{Q'}{\mathrm{C}}\right]}{\left[\frac{r}{\mathrm{m}}\right]^2}$$

長所：実用的で人間サイズに適合。

短所：真空の誘電率が現れる唐突さ。比例係数は著しく大きな数となる。

4．静電単位系における電気力と電気量

静電単位系（cgsesu単位系）では長さを[cm],電気量を静電単位[esu]、力をダイン[dyne]で測り、比例係数k_0は次のように決められている。esu=electro-static unit

$$F = k_0^{\mathrm{cgseus}} \frac{QQ'}{r^2},$$

$$k_0^{\mathrm{cgsesu}} = 1\,\mathrm{dyne} \cdot \mathrm{cm}^2 (\mathrm{esu})^{-2},$$

$$1\,\mathrm{dyne} \equiv 1\mathrm{g} \cdot \mathrm{cm} \cdot \mathrm{s}^{-2} = 10^{-5}\,\mathrm{N}.$$

この式は次のように書き直すと、意味がより鮮明になる。

$$\left[\frac{F}{\mathrm{dyne}}\right] = 1 \cdot \frac{\left[\frac{Q}{\mathrm{esu}}\right]\left[\frac{Q'}{\mathrm{esu}}\right]}{\left[\frac{r}{\mathrm{cm}}\right]^2}$$

長所：比例係数は単純、明快。電子などミクロな系の記述には最適。

短所：人間サイズから見ると、非常に小さい値となり、実用性が低い。

5. 二つの単位系における電気量の関係

力の大きさF、距離r,電気量など物理量は人間が選択する単位系によらないはずなので、それぞれの大きさと単位こみでは、同じであると考えると

$$k_0^{\mathrm{cgsesu}} = k_0^{\mathrm{MKSA}}$$

$$\to \mathrm{dyne} \cdot \mathrm{cm}^2 \cdot (\mathrm{esu})^{-2} = 8.98755 \times 10^9\,\mathrm{Nm}^2\mathrm{C}^{-2}$$

$$\to 1\,\mathrm{esu} = \left(\frac{10^{-9-5-4}}{8.98755} \right)^{1/2} \mathrm{C}$$

$$\therefore 1\,\mathrm{esu} = 0.333564 \times 10^{-9}\mathrm{C}$$

$$\to e = \begin{cases} 1.60210 \times 10^{-19}\mathrm{C} \\ 4.80298 \times 10^{-10}\mathrm{esu} \end{cases}$$

参考文献:バクーレー物理学コース4「量子物理(上）」、丸善、1972年。

P. 52, 表２A（主な物理定数）