量子力学における軌道角運動量

量子力学における軌道角運動量演算子の定義

軌道角運動量演算子の正準交換関係

軌道角運動量演算子の固有値と固有関数(固有状態)

軌道角運動量演算子の極座標表現

軌道角運動量演算子の固有値と固有関数(固有状態)

軌道角運動量演算子の行列表現

Made by R. Okamoto (Kyushu Institute of Technology)
filename=angularmom-summary80611.ppt

量子力学における軌道角運動量演算子の定義

$$\hat{\ell}_x \equiv \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y} \right),$$

$$\hat{\ell}_y \equiv \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z} \right),$$

$$\hat{\ell}_z \equiv \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} \right)$$

古典物理学:「回転する勢い」として角運動量

$$\vec{\ell} \equiv \vec{r} \times \vec{p} = (yp_z - zp_{y,} zp_x - xp_{z,}, xp_y - yp_{x,})$$

$$\vec{p} \equiv m\vec{v}$$

$$\vec{\hat{\ell}} \equiv (\hat{\ell}_x, \hat{\ell}_y, \hat{\ell}_z),$$

$$\vec{\hat{\ell}}^2 \equiv \left(\hat{\ell}_x\right)^2 + \left(\hat{\ell}_y\right)^2 + \left(\hat{\ell}_z\right)^2,$$

昇降演算子 $\hat{\ell}_\pm \equiv \hat{\ell}_x \pm \mathrm{i}\hat{\ell}_y \rightarrow \vec{\hat{\ell}}^2 = \hat{\ell}_+\hat{\ell}_- + \left(\hat{\ell}_z\right)^2 - \hat{\ell}_z$

$$\rightarrow \hat{\ell}_x = \left(\hat{\ell}_+ + \hat{\ell}_-\right)/2, \hat{\ell}_y = \left(\hat{\ell}_+ - \hat{\ell}_-\right)/2\mathrm{i}$$

軌道角運動量演算子の正準交換関係

$$\left[\hat{\ell}_x, \hat{\ell}_y\right] = i\hbar\hat{\ell}_z,\ \left[\hat{\ell}_y, \hat{\ell}_z\right] = i\hbar\hat{\ell}_x,\ \left[\hat{\ell}_z, \hat{\ell}_x\right] = i\hbar\hat{\ell}_y,$$

$$\left[\hat{\vec{\ell}}^2, \hat{\ell}_x\right] = \left[\hat{\vec{\ell}}^2, \hat{\ell}_y\right] = \left[\hat{\vec{\ell}}^2, \hat{\ell}_z\right] = 0,$$

$$\rightarrow \left[\hat{\ell}_z, \hat{\ell}_\pm\right] = \pm\hbar\,\hat{\ell}_\pm, \left[\hat{\ell}_+, \hat{\ell}_-\right] = 2\hbar\,\hat{\ell}_z$$

軌道角運動量のx、y、z成分はお互いに同時固有状態を持たないこと

軌道角運動量の二乗とx、y、z成分のどれかひとつは
お互いに同時固有状態を持つこと

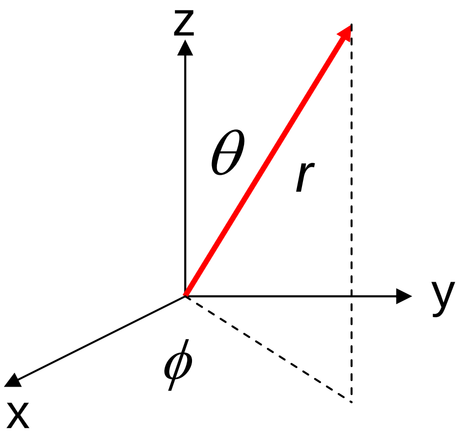
$\longrightarrow$ **通常は軌道角運動量の二乗とz成分の同時固有状態を考える**
(量子化軸としてz軸に選ぶこと)

軌道角運動量演算子の数学的性質は、正準交換関係により一義的に決まる。

軌道角運動量演算子の極座標表現

直交直線座標と極座標の関係

$$x = r\sin\theta\cos\phi, y = r\sin\theta\sin\phi, z = r\cos\theta$$



軌道角運動量演算子の極座標表現

$$\hat{\ell}_{\pm} = \hbar\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\phi}\left(\pm\frac{\partial}{\partial\theta} + \mathrm{i}\frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)(\text{複合同順})$$

$$\hat{\ell}_{\mathrm{z}} = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial\phi}$$

$$\hat{\ell}^{2} = -\hbar^{2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^{2}\theta}\frac{\partial^{2}}{\partial\phi^{2}}\right)$$

波動関数の方向依存性としての(軌道）角運動量

軌道角運動量演算子の固有値と固有関数(固有状態)

$$\hat{\vec{\ell}}^2 \left| \ell\, m \right\rangle = \hbar^2 \ell(\ell+1) \left| \ell\, m \right\rangle,$$

$$\hat{\ell}_z \left| \ell\, m \right\rangle = \hbar\, m \left| \ell\, m \right\rangle,$$

$$\hat{\ell}_\pm \left| \ell\, m \right\rangle = \hbar \sqrt{\ell(\ell+1) - m(m\pm 1)} \left| \ell\, m \pm 1 \right\rangle,$$

$$\left\langle \ell' m' \middle| \ell m \right\rangle = \delta_{\ell\ell'} \cdot \delta_{mm'}$$

$$\ell = 0, 1, 2, \cdots$$

軌道角運動量の量子化

$$m = -\ell, -\ell+1, \cdots, \ell-1, \ell \quad (\ell\text{の各値につき})$$

方向量子化

$$\left| \ell m \right\rangle \Leftrightarrow Y_{\ell m}(\theta,\phi) : \text{球面調和関数}$$

$$\left\langle \ell' m' \middle| \ell m \right\rangle \Leftrightarrow \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} Y^*_{\ell' m'}(\theta,\phi) Y_{\ell m}(\theta,\phi) \sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

軌道角運動量演算子の行列表現

$\ell = 1\hbar$の場合

$$\hat{\ell}_+ = \sqrt{2}\hbar \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \hat{\ell}_- = \sqrt{2}\hbar \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\ell}_z = \hbar \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

m=＋1　m=0　m=－1

$$\hat{\vec{\ell}}^{\,2} = 2\hbar^2 \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{bmatrix}$$

参考文献

M.E.ローズ「角運動量の基礎理論」(みすず書房)、1974年

Edmonds, Angular Momentum in Quantum Mechanics(?)、?

D. A.Varshalovich, A. N. Moskalev, V.K.Khersonskii,
Quantum Theory of Angular Momentum (World Scientific)、1988