1. スピン演算子 $\hat{s}_z, \hat{\boldsymbol{s}}^2$ の同時固有状態を $|s,m\rangle$ として, 次の公式が与えられている。

$$\begin{aligned}
\langle sm'|\hat{s}_z|sm\rangle &= m\,\hbar\delta_{m'm},\\
\langle sm'|\hat{\mathbf{s}}^2|sm\rangle &= \hbar^2 s(s+1)\delta_{m'm},\\
\langle sm'|\hat{s}_\pm|sm\rangle &= \hbar\sqrt{s(s+1)-m(m\pm1)}\delta_{m'm\pm1}.
\end{aligned}$$

ここで、$\hat{s}_\pm \equiv \hat{s}_x \pm i\hat{s}_y$ である。スピン上向き状態を 1 番目の固有状態、下向きを 2 番目の固有状態とする。

$$|1\rangle \equiv \left|s, m=\frac{1}{2}\right\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |2\rangle \equiv \left|s, m=-\frac{1}{2}\right\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) スピン演算子 $\hat{s}_z$ の行列表現（または表現行列）を求めよ。
(b) スピン演算子 $\hat{\boldsymbol{s}}^2$ の行列表現（または表現行列）を求めよ。
(c) スピン演算子 $\hat{s}_+$ の行列表現（または表現行列）を求めよ。
(d) スピン演算子 $\hat{s}_-$ の行列表現（または表現行列）を求めよ。
(e) スピン演算子 $\hat{s}_x$ の行列表現（または表現行列）を求めよ。
(f) スピン演算子 $\hat{s}_y$ の行列表現（または表現行列）を求めよ。

(解答例)

1. 題意より

$$(\hat{s}_z)_{11} \equiv \langle 1|\hat{s}_z|1\rangle \equiv \langle s=1/2, m'=1/2|\hat{s}_z|s=1/2, m=1/2\rangle = \frac{\hbar}{2}, \tag{1}$$

$$(\hat{s}_z)_{12} \equiv \langle 1|\hat{s}_z|2\rangle \equiv \langle 1/2, 1/2|\hat{s}_z|1/2, -1/2\rangle = 0, \tag{2}$$

$$(\hat{s}_z)_{21} \equiv \langle 2|\hat{s}_z|1\rangle \equiv \langle 1/2, -1/2|\hat{s}_z|1/2, 1/2\rangle = 0, \tag{3}$$

$$(\hat{s}_z)_{22} \equiv \langle 2|\hat{s}_z|2\rangle \equiv \langle 1/2, -1/2|\hat{s}_z|1/2, -1/2\rangle = -\frac{\hbar}{2}. \tag{4}$$

故に、

$$\hat{s}_z = \begin{bmatrix} \frac{\hbar}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar}{2} \end{bmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

2.

$$(\hat{\boldsymbol{s}}^2)_{11} = \hbar^2\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1), \tag{6}$$

$$(\hat{\boldsymbol{s}}^2)_{12} = 0, \tag{7}$$

$$(\hat{\boldsymbol{s}}^2)_{21} = 0, \tag{8}$$

$$(\hat{\boldsymbol{s}}^2)_{22} = \hbar^2\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1). \tag{9}$$

故に、

$$\hat{\boldsymbol{s}}^2 = \hbar^2 \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right] \tag{10}$$

3. 題意より

$$\begin{aligned}
(\hat{s}_+)_{11} &\equiv \langle 1|\hat{s}_+|1\rangle \equiv \langle s=1/2, m'=1/2|\hat{s}_+|s=1/2, m=1/2\rangle = 0, && (11)\\
(\hat{s}_+)_{12} &\equiv \langle 1|\hat{s}_+|2\rangle \equiv \langle 1/2, 1/2|\hat{s}_+|1/2, -1/2\rangle = \hbar\sqrt{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)-(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}+1)} \\
&= \hbar, && (12)\\
(\hat{s}_+)_{21} &\equiv \langle 2|\hat{s}_+|1\rangle \equiv \langle 1/2, -1/2|\hat{s}_+|1/2, 1/2\rangle = 0, && (13)\\
(\hat{s}_+)_{22} &\equiv \langle 2|\hat{s}_+|2\rangle \equiv \langle 1/2, -1/2|\hat{s}_+|1/2, -1/2\rangle = 0. && (14)
\end{aligned}$$

故に、

$$\hat{s}_+ = \hbar\left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}\right] \tag{15}$$

4.

$$\begin{aligned}
(\hat{s}_-)_{11} &\equiv \langle 1|\hat{s}_-|1\rangle \equiv \langle s=1/2, m'=1/2|\hat{s}_-|s=1/2, m=1/2\rangle = 0, && (16)\\
(\hat{s}_-)_{12} &\equiv \langle 1|\hat{s}_-|2\rangle \equiv \langle 1/2, 1/2|\hat{s}_-|1/2, -1/2\rangle = 0, && (17)\\
(\hat{s}_-)_{21} &\equiv \langle 2|\hat{s}_-|1\rangle \equiv \langle 1/2, -1/2|\hat{s}_-|1/2, 1/2\rangle = \hbar\sqrt{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)-(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-1)} \\
&= \hbar, && (18)\\
(\hat{s}_-)_{22} &\equiv \langle 2|\hat{s}_-|2\rangle \equiv \langle 1/2, -1/2|\hat{s}_-|1/2, -1/2\rangle = 0. && (19)
\end{aligned}$$

故に、

$$\hat{s}_- = \hbar\left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{array}\right] \tag{20}$$

5.

$$\hat{s}_x = \frac{\hat{s}_+ + \hat{s}_-}{2} = \frac{\hbar}{2}\left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right] \tag{21}$$

6.

$$\hat{s}_y = \frac{\hat{s}_+ - \hat{s}_-}{2i} = \frac{\hbar}{2}\left[\begin{array}{cc} 0 & -i \\ i & 0 \end{array}\right] \tag{22}$$